CORREZIONE

Esercizio 1

- A) Dal teorema fondamentale del calcolo integrale abbiamo

$$F'(x) = e^{-x^2}, \quad G'(x) = 1 - e^{-x},$$

da cui F risulta monotona crescente (essendo la sua derivata strettamente positiva), mentre

$$G'(x) \geqslant 0 \text{ se } e^{-x} \leqslant 1 \to x \geqslant 0.$$

- B) per stabilire la convessità (essendo funzioni regolari) studiamo segno di F'' e G''. Abbiamo

$$F''(x) = -2xe^{-x^2}, \quad G''(x) = e^{-x}$$

da cui F'' è positivo se $x \leqslant 0$ (quindi F non è sempre convessa), mentre $G'' > 0$ per ogni x e quindi G è convessa.

- C) F non ammette punti stazionari perché $F' > 0$. G ammette come punto stazionario $x = 0$ che dá $G'(0) = 0$. Essendo G convessa sempre è di minimo.

Esercizio 2

la soluzione di un'equazione differenziale lineare di ordine II (non omogenea) è data da

$$u(x) = u_{om}(x) + u_p(x),$$

dove u_{om} risolve l'equazione omogenea

$$u'' + 4u' + 4u = 0$$

e u_p è una soluzione particolare.

Scrivendo equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$$

otteniamo due radici coincidenti $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$ da cui

$$u_{om}(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x}$$

mentre $u_p(x)$ può essere preso del tipo $u_p(x) = \frac{5}{4}$. La soluzione ottenuta risulta

$$u(x) = c_1 e^{-2x} + c_2 x e^{-2x} + \frac{5}{4}$$

dove c_1, c_2 si determinano in base a

$$u(0) = c_1 + \frac{5}{4} = 0$$

da cui $c_1 = -\frac{5}{4}$ e

$$u'(0) = -2c_1 + c_2 = -\frac{5}{2} + c_2 = 1$$

da cui $c_2 = \frac{7}{2}$.

Esercizio 3

L'equazione differenziale lineare di I ordine ha soluzione del tipo

$$u(x) = ce^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int e^{A(x)} \frac{5}{x+1} \, dx$$

dove A è una primitiva di $\frac{1}{x+1}$. Sia $A(x) = \ln(x+1)$. Da questo abbiamo

$$u(x) = \frac{1}{x+1}(5x + c).$$

Ponendo $u(0) = 0$ si ottiene $c = 0$. Quindi

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x} \frac{5x}{x+1} = 5$$

Esercizio 4

- 1) Per il confronto asintotico la funzione integranda è del tipo $\frac{1}{x^{2\alpha - \frac{1}{2}}}$. L'integrale quindi converge se $2\alpha - \frac{1}{2} > 1$, quindi per $\alpha > \frac{3}{4}$
- 2) Si osserva che $\int_n^{n+1} \frac{5}{x} \geqslant \frac{5}{n+1}$. Essendo che $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5}{n+1}$ diverge, per il criterio del confronto la nostra serie diverge.
- 3) Per il criterio del confronto asintotico la serie converge se $\alpha - 1 > 1$ essendo $\frac{\sin n + n}{n^\alpha}$ asintoticamente equivalente a $\frac{1}{n^{\alpha - 1}}$. Quindi la serie converge se $\alpha > 2$.
- 4) Abbiamo

  $$\int_0^1 \ln x = \lim_{\varepsilon \searrow 0} \int_\varepsilon^1 \ln x,$$

  dove, integrando per parti,

  $$\int_\varepsilon^1 \ln x = -\varepsilon \ln \varepsilon - \int_\varepsilon^1 x \frac{1}{x} = -\varepsilon \ln \varepsilon - (1 - \varepsilon).$$

  Calcolando

  $$\lim_{\varepsilon \searrow 0} -\varepsilon \ln \varepsilon - 1 + \varepsilon = -1$$

  per cui l'integrale converge.

Esercizio 5 Per calcolare il flusso di $\mathbf{F}$ attraverso il bordo di D si applica il teorema della divergenza

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} dS = \int\int\int_D \text{div } \mathbf{F} dxdydz.$$

Essendo div $\mathbf{F} = 3z$ dobbiamo calcolare

$$\int\int\int_D 3z = \int_0^1 3z \left(\int\int_{x^2+y^2 \leqslant 1} 1 dxdy \right) dz = 3\pi \int_0^1 zdz = \frac{3}{2}\pi.$$

Esercizio 6 La serie di potenze ha centro $c = 0$ e successione $a_n = \frac{(-1)^n}{3^n n}$. Per calcolare il raggio si procede come segue

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^n n}{3^{n+1}(n+1)} = \frac{1}{3} = L,$$

quindi il raggio vale $R = \frac{1}{L} = 3$. In $(-3, 3)$ la serie converge assolutamente. Si deve studiare comportamento per $x = 3, -3$. Abbiamo per $x = 3$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ che converge semplicemente per Leibniz, ma non assolutamente. Per $x = -3$ la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

Esercizio 7 Si deve calcolare un integrale curvilineo di seconda specie. Si ha

$$\int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_0^{\pi/2} \mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) dt$$

dove $\mathbf{r}'(t) = (-\sin t, \cos t)$ e $\mathbf{F}(\mathbf{r}(t)) = (\cos t, -\cos t \sin t)$. Si ottiene

$$\int_0^{\pi/2} -\sin t \cos t - \cos^2 t \sin t = \frac{1}{2}(\cos t)^2 + \frac{1}{3}(\cos t)^3|_0^{\pi/2} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

da cui $3 \int_\gamma \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = -\frac{5}{2}$.

Esercizio 8 Si applica il teorema di Gauss-Green

$$\int_{\partial T} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int\int_T \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

dove T e' triangolo e $F_1 = xy$, $F_2 = 3xy$. Quindi abbiamo

$$\int\int_T 3y - xdxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x 3y - xdy \right) dx = \int_0^1 \frac{3}{2}x^2 - x^2 dx = \frac{1}{6}$$

Esercizio 9 La curva di livello passante per $(0, 0)$ e' perpendicolare a $\nabla f(0, 0)$. Abbiamo

$$\nabla f(x,y) = (2(x-1), 2(y+3))$$

da cui $\nabla f(0,0) = (-2,6)$ da cui la direzione della curva di livello (u_1,u_2) e' tale che

$$(-2,6)\cdot(u_1,u_2) = -2u_1 + 6u_2 = 0$$

e otteniamo il vettore $(3,1)$ con versore associato $\frac{1}{\sqrt{10}}(3,1)$.

Inoltre $\nabla f = (0,0)$ se $(x,y) = (1,-3)$. In questo punto si calcola la matrice hessiana che risulta definita positiva (e' una matrice diagonale con 2,2 sulla diagonale principale) ed e' quindi punto di minimo. Le curve di livello di f sono delle circonferenze di centro $(1,-3)$ e quindi si hanno dei massimi in $(0,-10)$ e $(2,-10)$ (osserviamo che f rappresenta il quadrato della distanza del punto (x,y) dal punto $(1,-3)$.

Esercizio 10 Essendo il campo $\mathbf{F}$ definito in $\mathbb{R}^2$ (che e' semplicemente connesso) perche' sia conservativo basta che si abbia

$$\frac{\partial F_2}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

da cui

$$2-\alpha^2 = \alpha.$$

Risolvendo l'equazione si ottengono $\alpha = -2, 1$.

- Per $\alpha = -2$ un potenziale e' del tipo $U(x,y) = -2xy + c$. Se si vuole annullare in $(2,2)$ si sceglie $c = 8$
- Per $\alpha = 1$ un potenziale e' del tipo $U(x,y) = xy + c$. Se si vuole annullare in $(2,2)$ si sceglie $c = -4$.