

Il metodo dei cammini di Feynman

Lezione 4

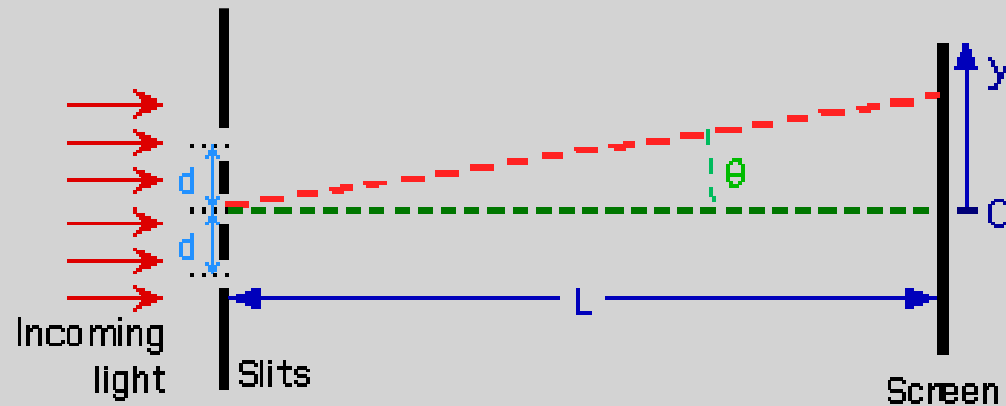
10 esercizi e problemi sul metodo della somma sui cammini



1. Fenditure multiple



Si consideri un Sistema di tre fenditure con distanza d l'una dalla successiva (e quindi dimensioni totali $2d$), una sorgente luminosa abbastanza distante da poter essere considerata equidistante dalle tre fenditure con ottima approssimazione, e lo schermo a distanza D molto grande. Trovare le condizioni per cui la probabilità di rivelare il fotone è massima, e quelle per cui è minima. I massimi sono nella stessa posizione di quelli del sistema analogo di due sole fenditure con passo d ? E i minimi?



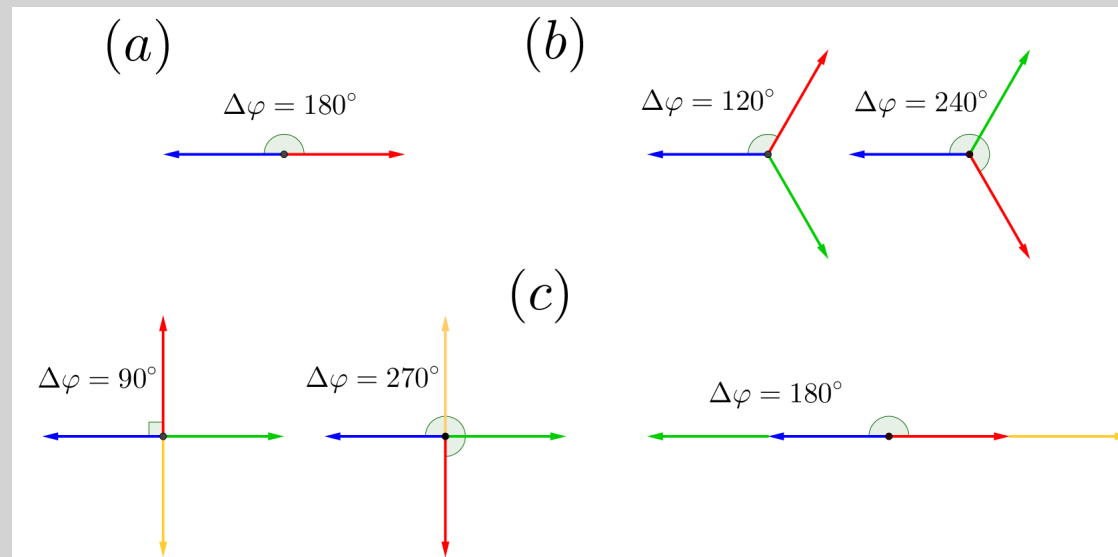
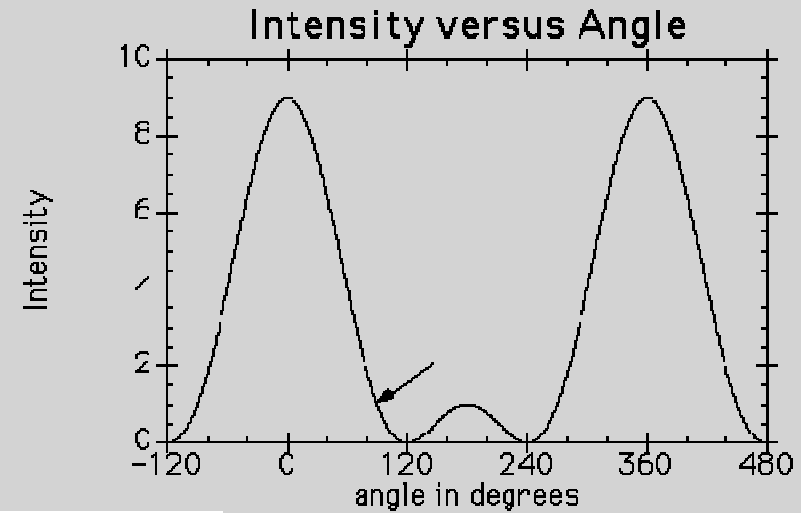
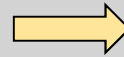
Si consideri ora un reticolo con quattro fenditure sempre con passo d . I massimi per la probabilità di rivelazione si troveranno di nuovo agli stessi angoli? E i minimi? Quanti minimi vi sono tra due massimi?

Alla luce dei risultati precedenti, interpretare qualitativamente il risultato che si ottiene per un reticolo di diffrazione.

Interferenza da fenditure multiple



Il caso delle tre fenditure



Le orientazioni dei fasori per i minimi per due, tre e quattro fenditure



2. Fenditure in successione

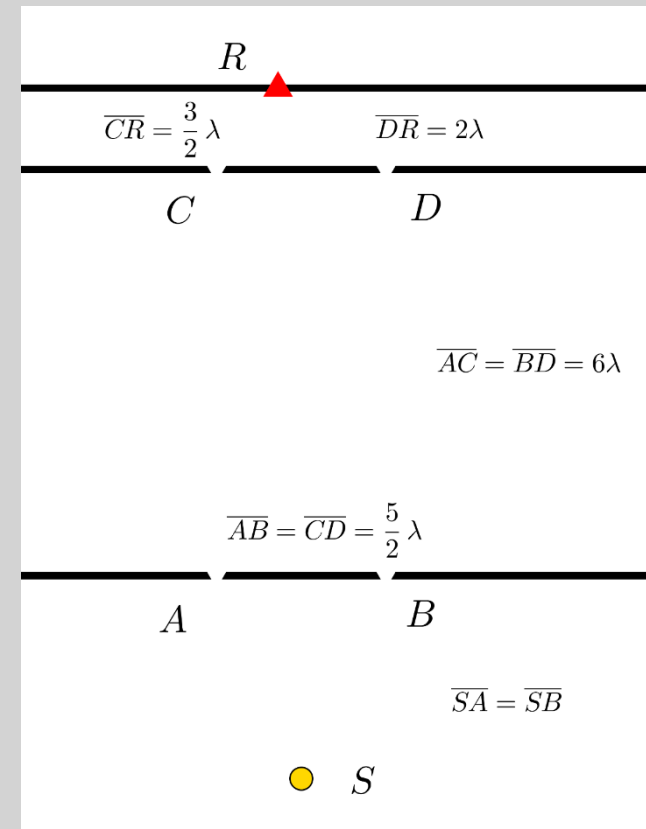


Considerare il setup sperimentale descritto in figura, costituito da una sorgente S che emette un fotone di lunghezza d'onda λ , due schermi successivi con doppie fenditure A e B (primo schermo) e C e D (secondo schermo) e un rivelatore R su uno schermo finale.

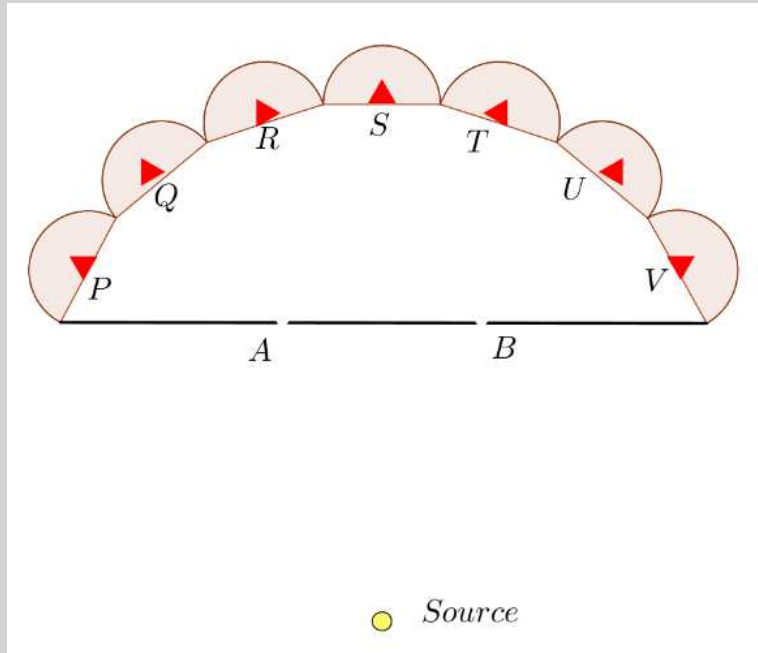
Considerare le fenditure puntiformi.

1) Disegnare tutti i possibili cammini (rettilinei) che possono portare da S ad R , e calcolare gli sfasamenti dei rispettivi vettori. Nella situazione considerata, la probabilità di rivelare il fotone in R è, (rispetto agli altri punti dello schermo) massima, è nulla, o non è né massima né nulla?

2) Considerare ora il caso in cui venga posto in B un rivelatore capace di rivelare il passaggio del fotone, senza disturbarlo. In questa nuova situazione, la probabilità di rivelare il fotone in R è uguale al caso precedente? Determinare tale probabilità lasciando indicate un'arbitraria costante di normalizzazione N .



3. Esercizio sulla normalizzazione delle probabilità



The figure represents a two slits experiment in which, rather than on a continuous screen, the quantum object (a photon in this case) is revealed using seven discrete detectors P, Q, R, S, T, U, V.

Assume that the detectors are made in such a way that the photon cannot pass between two of them, but necessarily be revealed by one of them. However, we make the simplifying assumption of using for computing amplitudes only the positions P, Q, R, S, T, U, V which approximately correspond to the centers of the detectors. If λ is the wavelength of the monochromatic photon emitted by the source (which is equally distant from the slits A and B), the lengths of the relevant segments in units of λ are:

$$\text{Source-A} = \text{Source-B} = 4 \lambda$$

$$\text{AP} = \text{BV} = 2 \lambda$$

$$\text{BP} = \text{AV} = 4 \lambda$$

$$\text{AQ} = \text{BU} = 2 \lambda$$

$$\text{BQ} = \text{AU} = 3.5 \lambda$$

$$\text{AR} = \text{BT} = 2.25 \lambda$$

$$\text{BR} = \text{AT} = 3 \lambda$$

$$\text{AS} = \text{BS} = 2.5 \lambda$$

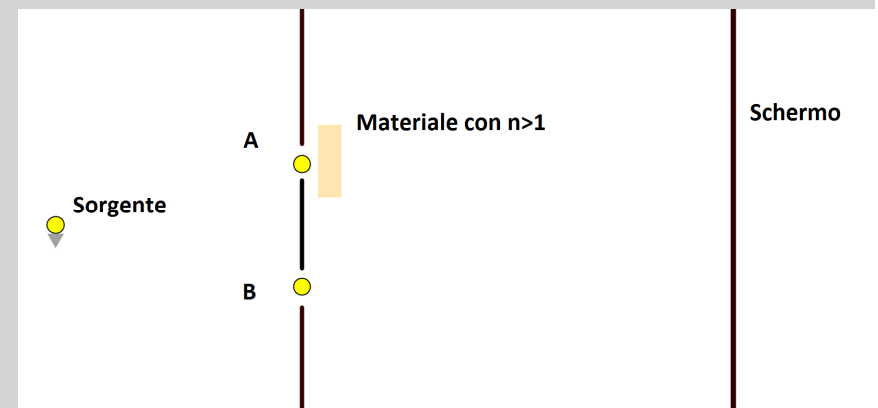
Using these data, compute the detection probabilities at the detectors P, Q, R, S, T, U, V.

4. Effetto di materiali rifrangenti



Viene effettuato un esperimento di doppia fenditura con una sorgente che emette singoli fotoni, di lunghezza d'onda $\lambda=640$ nm. Dopo l'esperimento normale, di fronte ad una delle fenditure viene posta una sottile pellicola di materiale rifrangente, dello spessore $s=1.28$ μm . Si osserva, dopo un accumulo di numerosi fotoni, una inversione delle frange di interferenza, ossia minimi dove nel caso senza pellicola si avevano massimi, e viceversa.

- 1) Ignorare ogni tipo di riflessione dovuta all'interposizione della pellicola trasparente. Determinare il minimo possibile indice di rifrazione del materiale utilizzato. Interpretare qualitativamente il fenomeno in termini di singolo fotone.
- 2) Supporre ora, continuando a non considerare riflessioni interne, che la pellicola lasci passare l'81% della luce incidente. Qual è l'intensità della luce che si osserva in un minimo di interferenza, rispetto a quella che si osserva in un massimo?

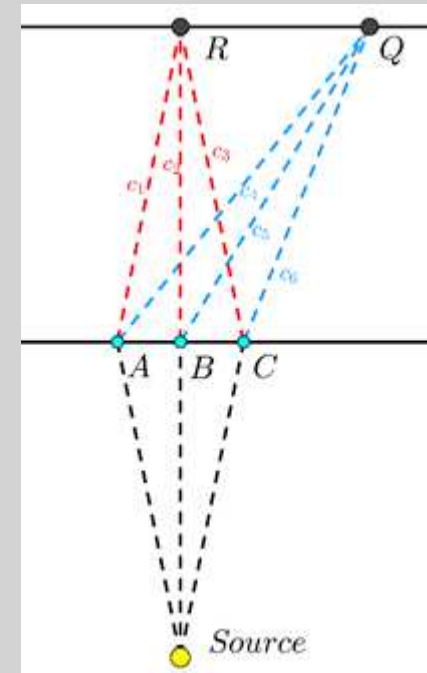


5. Tre fenditure con misura which way



A photon with defined energy, and wavelength λ in the vacuum, is emitted towards a system of three slits A, B, C. A screen is placed at a large distance from the slits (Fraunhofer conditions). In these conditions, the paths c_1, c_2, c_3 can be considered as having the same length, while paths c_4, c_5, c_6 differ by $\lambda/3$ one from the successive (so that c_4 differs from c_6 by $2\lambda/3$).

- 1) Compute the ratio between the probabilities of detecting the photon in Q and R.
- 2) Compute the same ratio in the case that at slit B a non destructive detector is placed (which we assume with 100% efficiency).

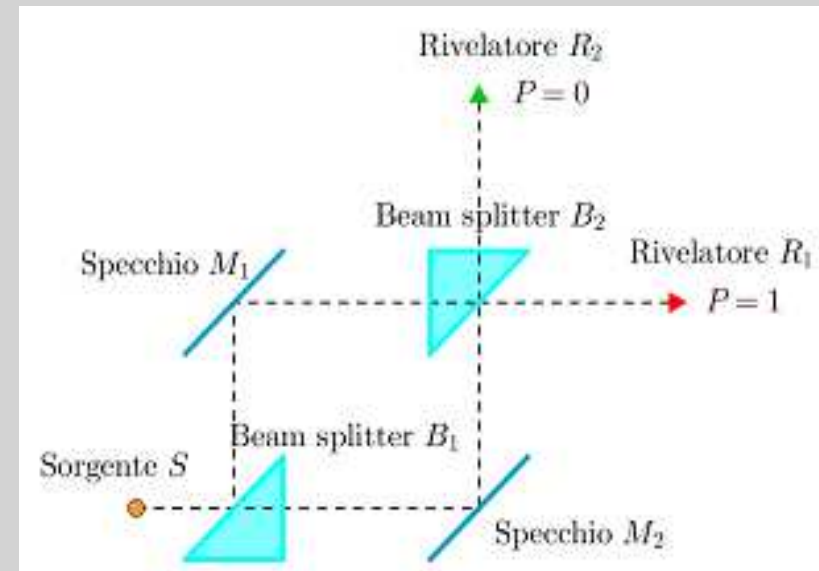


6. il Mach-Zehnder



1. Si consideri un interferometro Mach-Zehnder, come riportato nella figura seguente. La sorgente luminosa è una sorgente a luce rossa con $\lambda=660$ nm. Si ipotizzi che il ramo superiore del Mach-Zehnder (il tratto BeamSplitter1-Mirror1-Beamspitter2) sia più lungo di quello inferiore di 220 nm. Si calcoli la probabilità che un fotone raggiunga ognuno dei rivelatori.

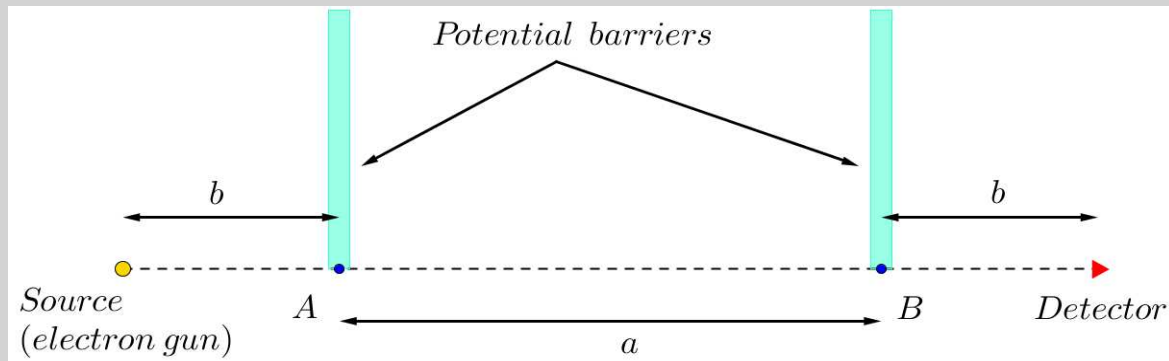
2. Si consideri ora invece il caso in cui i due bracci abbiano uguale lunghezza geometrica. Nel ramo superiore viene inserita un sottile strato di materiale trasparente, spesso $d=2000$ nm; l'indice di rifrazione del materiale è $n=1,74$. I fotoni emessi hanno sempre $\lambda=660$ nm (nel vuoto, ma non nel materiale trasparente, dove è più corta, cioè $\lambda'=\lambda/n$). Calcolare le probabilità ai rivelatori.



7. Scattering risonante da doppia barriera



Un elettrone di massa m_e ed energia cinetica E è emesso da una sorgente in direzione orizzontale. Un rivelatore è posto a distanza $a+2b$ dalla sorgente. Due barriere semiriflettenti A e B sono poste a distanza a una dall'altra, come in Figura 4.



Supporre che le barriere abbiano il 50% di probabilità di trasmettere o riflettere l'elettrone, e che per ogni riflessione la fase del vettore associato sia anche ruotata di π .

- 1) Spiegare perchè in questa situazione esistono infiniti cammini che portano dalla sorgente al rivelatore, e identificarli.
- 2) Calcolare, per una generica energia E dell'elettrone, la differenza di fase tra due cammini che differiscono per un giro completo tra le barriere.
- 3) Utilizzando la simulazione "doublebarrier.ggb" osservare che esistono un insieme discreto di valori dell'energia per cui la probabilità ha dei picchi ben definiti. Utilizzando il risultato trovato al punto 2, trovare una condizione che esprime tale insieme di valori.

8. Interferometro gravitazionale per neutroni



4.15. The scheme shown below is that of a *neutron interferometer*, with the help of which one can find evidence for the action of gravity upon neutrons. A beam, falling upon a suitably adjusted crystal (at 'Bragg incidence') is separated into two beams – one transmitted directly and the other reflected. Consider the set-up shown in the figure, where a first crystal separates the incident beam at A and the third crystal recombines at C, the beams

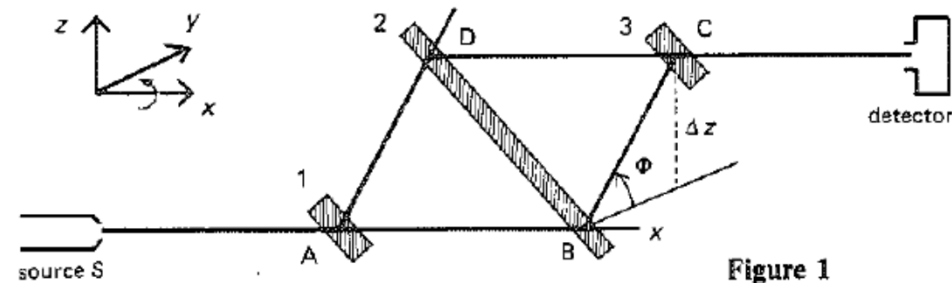


Figure 1

reflected by the second at B and D. The plane ABCD makes an angle Φ with the horizontal plane xOy . The neutrons issuing from the source S are monochromatic. The detector picks up the neutrons which cross the apparatus.

(a) The vertical axis, Oz , of the figure marks the direction of the gravitational field, in which the interferometer is placed. Is the energy of neutrons along the branch AB the same as along the branch CD? Do they have the same de Broglie wavelength?

(b) Using the symbolism introduced in this chapter (sect. 4.4.3), express the transition probability $\mathcal{P}(\text{detector} \leftarrow \text{source})$, for *one* neutron, from the source to the detector. Denote, for example, by $\langle C|D \rangle$, the amplitude of propagation from D to C, and assume that in each crystal, the amplitudes of transmission in the direct and the reflected beams are equal. In what way does the difference Δz in altitude between the two branches of the apparatus affect the probability?

Da J.M. Levy-Leblond e F. Balibar, *Quantique*

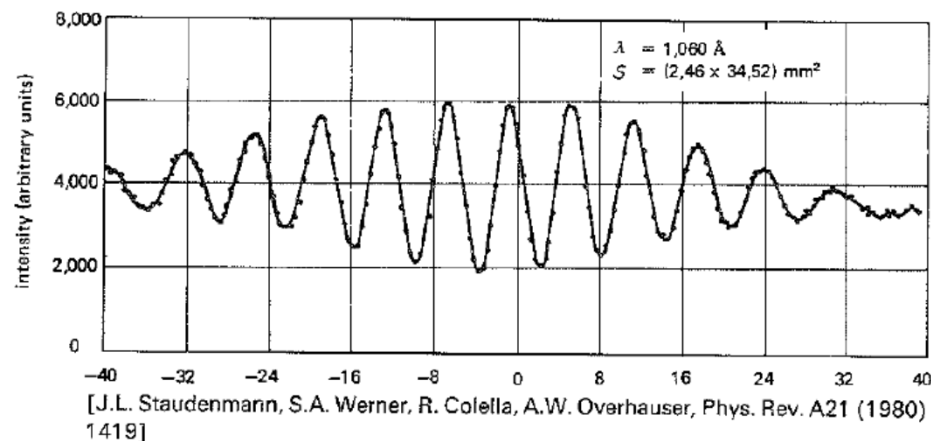


(c) At first the apparatus is arranged so that the plane ABCD is vertical ($\phi = \frac{1}{2}\pi$). Assuming that the relative phase of the amplitudes, which are superimposed at the entrance to the detector, may be calculated as in optics (i.e., by means of the difference of the 'optical paths'), show that the phase differences along the routes AD and BC are the same, while on the other hand, the phase difference along the route AB is greater than that along DC, by an amount

$$\Delta\varphi = 2\pi M^2 g S \lambda / h^2,$$

where λ is the wavelength of the neutrons being used, $\lambda = 1.42 \text{ \AA}$; M is the mass of the neutron, g the acceleration due to gravity and $S = 10.1 \text{ cm}^2$, the area of the parallelogram ABCD.

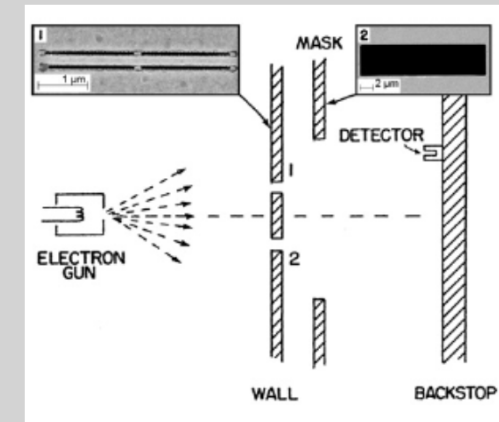
(d) The apparatus is now rotated about the axis Ox. Interpret the curve in fig. 2, which reproduces the variation in the number of neutrons picked up by the detector, as a function of the angle ϕ made by the plane ABCD with the horizontal. Calculate the phase difference $\Delta\varphi$ as a function of the angle of rotation ϕ . Verify quantitatively, the accord between theory and experiment.



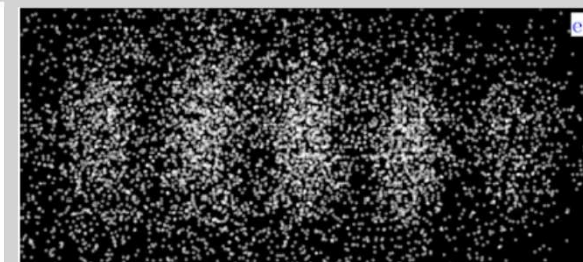
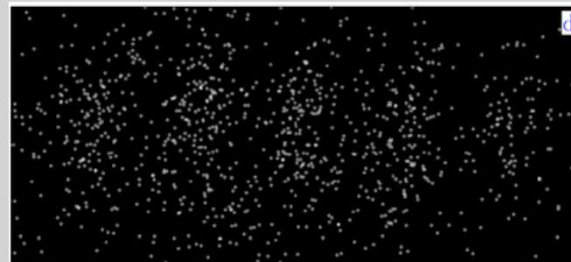
9. L'esperimento più bello, v.2



Nel 2012, alcuni scienziati dell'Università del Nebraska hanno ripetuto, per scopi didattici e divulgativi, l'esperimento di interferenza da doppia fenditura con un elettrone alla volta (eletto l'«esperimento più bello» della fisica dalla rivista *Physics World*) che era stato eseguito per la prima volta dagli italiani Merli, Missiroli e Pozzi dell'Università di Bologna nel 1974. Secondo le spiegazioni riportate nell'articolo degli scienziati americani, la figura di interferenza è stata ottenuta con un dispositivo in grado di sparare un elettrone al secondo, ciascuno accelerato da una differenza di potenziale di 600 V, contro due fenditure larghe ciascuna $a = 62$ nm, separate da una distanza $d = 273$ nm, e rivelati su uno schermo (con strumenti adatti alla rivelazione degli elettroni) ad una distanza $D = 240$ mm dalle fenditure. Il «cannone» che spara gli elettroni dista invece $L = 30.5$ cm dalle fenditure.

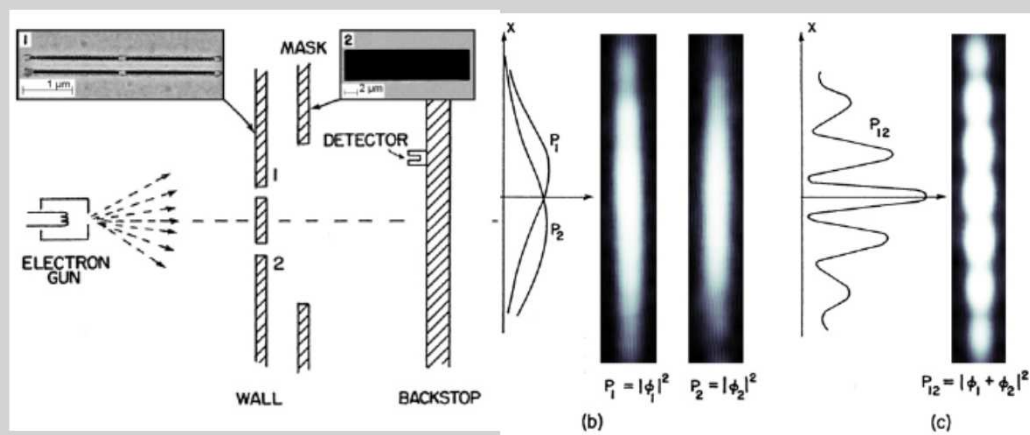


- 1) Giustifica il fatto che è possibile applicare l'approssimazione di Fraunhofer a questo problema. Dove interviene tale approssimazione nel calcolo dei massimi di interferenza?
- 2) Considerando dapprima le fenditure puntiformi, calcola la distanza fra i primi due massimi (e quindi la scala delle immagini sottostanti) applicando eventualmente l'approssimazione di piccoli angoli.





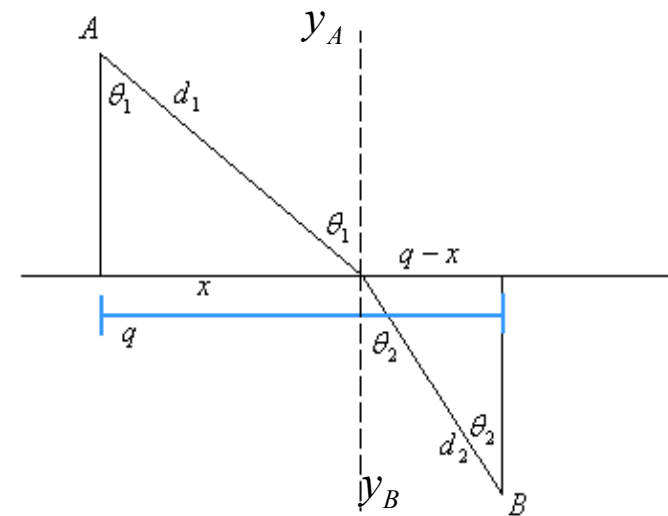
3) Il risultato del fatto che le fenditure non siano puntiformi è che la figura sullo schermo è la composizione di una figura di interferenza e di una di diffrazione. Considerando il problema come quello della diffrazione da una singola fenditura, oppure utilizzando il principio di indeterminazione, calcola la larghezza della figura di diffrazione da ciascuna fenditura, che essenzialmente pone un limite al numero delle frange di interferenza che sono effettivamente visibili.



10. Legge di Snell dal Principio di Fermat



1. Dimostrare che il cammino per il quale il tempo di percorrenza tra i punti A e B è minimo al variare del punto di incidenza rispetta la Legge di Snell.
2. Dimostrare che imporre la condizione che la fase del vettore associato ai cammini sia costante rispetto alla variazione del punto di incidenza permette ancora una volta di trovare la legge di Snell.



11. Energia minima dell'oscillatore armonico



Partendo dalla formula classica per l'energia totale di una particella in un potenziale di tipo elastico (oscillatore armonico)

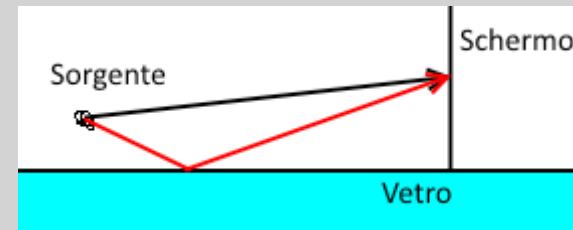
$$E = \frac{p^2}{2m} + m\omega^2 x^2$$

Stimare l'energia minima utilizzando il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto. In particolare, mostrare che esiste uno specifico valore dell'incertezza Δx per cui si ha il valore minimo dell'energia.

12. Lo specchio di Lloyd (generale)



Uno specchio di Lloyd è un apparato costituito da una sorgente luminosa monocromatica posta ad una distanza a da una superficie riflettente; da uno schermo che svolge il ruolo di rivelatore. La sorgente ed il rivelatore possono essere disposti all'interno del materiale riflettente, quindi la riflessione è contro la superficie interna od all'esterno (riflessione esterna):



Sullo schermo si crea una figura dovuta all'interferenza tra il cammino diretto ed il cammino riflesso. Si assuma che lo specchio rifletta un fotone con probabilità 100%, la distanza della sorgente dallo specchio sia 0,1 mm e la lunghezza d'onda dei fotoni sia 640 nm (luce rossa) e lo schermo sia a distanza 1 m $\gg a$.

Nel punto dove lo schermo incontra lo specchio, avremo un minimo od un massimo?

Che figura ci si aspetta? Calcolare le posizioni del primo minimo e massimo delle frange di interferenza sullo schermo. Suggerimento: considerare la sorgente virtuale, riflessione di quella reale. La disposizione ne richiama un'altra simile?

