Il metodo dei cammini di Feynman

Lezione 2

Linee guida per la progettazione di un percorso didattico e un confronto con il capitolo 1 di *QED*

Piano Lauree Scientifiche

Premessa

Dal punto di vista dei cammini di Feynman il significato della fisica quantistica è, pressapoco, il seguente: *ciò che è indistinguibile, interferisce.* E' come se tutti i modi diversi, ma non distinguibili sperimentalmente, in cui una cosa può avvenire, avvenissero contemporaneamente e interferissero tra loro.

Naturalmente la frase precedente enuncia un principio molto generale, e come tale del tutto inutile in pratica. Per renderlo utilizzabile occorre enunciare regole precise, che spieghino come, caso per caso, il principio vada applicato. Costruire un percorso didattico basato sul metodo dei cammini di Feynman significa trovare una strada per affrontare gradualmente le difficoltà che inevitabilmente si pongono lungo il percorso, fino al livello di approfondimento che si vuole raggiungere.

In questa lezione, ripercorreremo la parte introduttiva del percorso, in parallelo alla discussione di alcune parti del primo capitolo di *QED.* Dal confronto delle nostre scelte con quelle di Feynman emergeranno alcuni tratti comuni, e saranno individuate possibili vie per costruire percorsi didattici differenziati.

Dall'introduzione di "QED"

That's my position: I'm going to explain to you what the physicists are *doing* when they are predicting how Nature will behave, but I'm not going to teach you any tricks so you can do it *efficiently*. You will discover that in order to make any reasonable predictions with this new scheme of quantum electrodynamics, you would have to make an awful lot of little arrows on a piece of paper. It takes seven years—four undergraduate and three graduate—to train our physics students to do that in a tricky, efficient way. That's where we are going to skip seven years of education in physics: By explaining quantum electrodynamics to you in terms of what we are *really doing*, I hope you will be able to understand it better than do some of the students!

Il piano appare ambizioso, ma è in effetti abbastanza realistico. Dice Feynman "io vi spiegherò esattamente, dal punto di vista concettuale, quello che i fisici fanno; solo che non vi spiegherò nessuna delle strategie che adottano per farlo rapidamente". Questo è esattamente ciò che si può fare con il metodo della somma sui cammini.

Finally, there is this possibility: after I tell you something, you just can't believe it. You can't accept it. You don't like it. A little screen comes down and you don't listen anymore. I'm going to describe to you how Nature is—and if you don't like it, that's going to get in the way of your understanding it. It's a problem that physicists have learned to deal with: They've learned to realize that whether they like a theory or they don't like a theory is *not* the essential question. Rather, it is whether or not the theory gives predictions that agree with experiment. It is not a question of whether a theory is philosophically delightful, or easy to understand, or perfectly reasonable from the point of view of common sense. The theory of quantum electrodynamics describes Nature as absurd from the point of view of common sense. And it agrees fully with experiment. So I hope you can accept Nature as She is—absurd.

I'm going to have fun telling you about this absurdity, because I find it delightful. Please don't turn yourself off because you can't believe Nature is so strange. Just hear me all out, and I hope you'll be as delighted as I am when we're through.

Il fenomeno che si vuole spiegare

The situation today is, we haven't got a good model to explain partial reflection by two surfaces; we just calculate the probability that a particular photomultiplier will be hit by a photon reflected from a sheet of glass. I have chosen this calculation as our first example of the method provided by the theory of quantum electrodynamics. I am going to show you "how we count the beans"—what the physicists do to get the right answer. I am not going to explain how the photons actually "decide" whether to bounce back or go through; that is not known. (Probably the question has no meaning.) I will only show you how to calculate the correct *probability* that light will be reflected from glass of a given thickness, because that's the only thing physicists know how to do! What we do to get the answer to *this* problem is analogous to the things we have to do to get the answer to *every other* problem explained by quantum electrodynamics.

You will have to brace yourselves for this—not because it is difficult to understand, but because it is absolutely ridiculous: All we do is draw little arrows on a piece of paper—that's all!

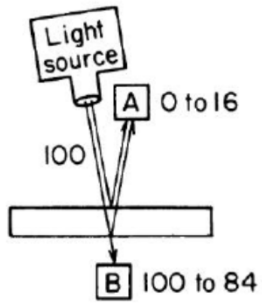


FIGURE 4. *An experiment to measure the partial reflection of light by two surfaces of glass. Photons can get to the photomultiplier at A by reflecting off either the front surface or the back surface of the sheet of glass; alternatively, they could go through both surfaces and end up hitting the photomultiplier at B. Depending on the thickness of the glass, 0 to 16 photons out of every 100 get to the photomultiplier at A. These results pose difficulties for any reasonable theory, including the one in Figure 3. It appears that partial reflection can be "turned off" or "amplified" by the presence of an additional surface.*

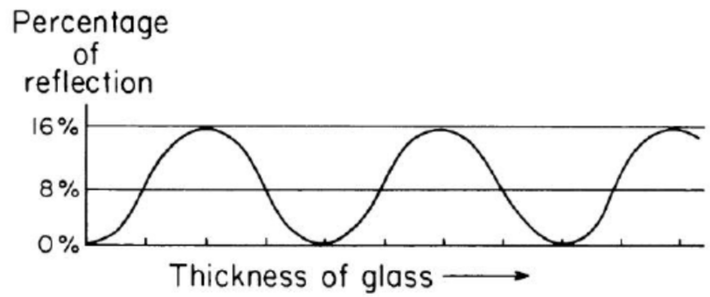


FIGURE 5. *The results of an experiment carefully measuring the relationship between the thickness of a sheet of glass and partial reflection demonstrate a phenomenon called "interference." As the thickness of the glass increases, partial reflection goes through a repeating cycle of zero to 16%, with no signs of dying out.*

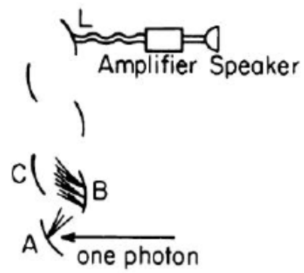
Feynman fa una scelta anticonformista, e per alcuni versi problematica: il sistema che sceglie per illustrare il contenuto concettuale della fisica quantistica è la riflessione parziale della luce da una pellicola di spessore variabile.

The human eye is a very good instrument: it takes only about five or six photons to activate a nerve cell and send a message to the brain. If we were evolved a little further so we could see ten times more sensitively, we wouldn't have to have this discussion—we would all have seen very dim light of one color as a series of intermittent little flashes of equal intensity.

Il primo problema che Feynman si pone è quello di convincere i suoi lettori dell'esistenza del fotone, e naturalmente anche del fatto che è indivisibile.

If you put a whole lot of photomultipliers around and let some very dim light shine in various directions, the light goes into one multiplier or another and makes a click of full intensity. It is all or nothing: if one photomultiplier

FIGURE 1. *A photomultiplier can detect a single photon. When a photon strikes plate A, an electron is knocked loose and attracted to positively charged plate B, knocking more electrons loose. This process continues until billions of electrons strike the last plate, L, and produce an electric current, which is amplified by a regular amplifier. If a speaker is connected to the amplifier, clicks of uniform loudness are heard each time a photon of a given color hits plate A.*

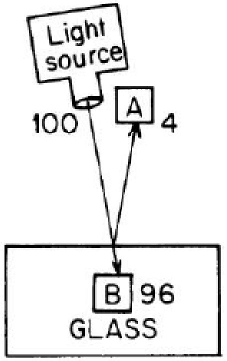


goes off at a given moment, none of the others goes off at the same moment (except in the rare instance that two photons happened to leave the light source at the same time). There is no splitting of light into "half particles" that go different places.

La riflessione parziale da una singola superficie

For every 100 photons that go straight down toward the glass at 90°, an average of 4 arrive at A and 96 arrive at B. So "partial reflection" in this case means that 4% of the photons are reflected by the front surface of the glass, while the other 96% are transmitted. *Already* we are in great difficulty: how can light be *partly* reflected? Each photon ends up at A or B—how does the photon "make up its mind" whether it should go to A or B? (Audience laughs.) That may sound like a joke, but we can't just laugh; we're going to have to explain that in terms of a theory! Partial reflection is already a deep mystery, and it was a very difficult problem for Newton.

FIGURE 2. *An experiment to measure the partial reflection of light by a single surface of glass. For every 100 photons that leave the light source, 4 are reflected by the front surface and end up in the photomultiplier at A, while the other 96 are transmitted by the front surface and end up in the photomultiplier at B.*



Se si ammette l'esistenza dei fotoni, il comportamento della luce richiede un'*interpretazione statistica*: l'unico modo per riconciliare il comportamento osservato con un'interpretazione a fotoni è quello di immaginare che vi sia una qualche *legge probabilistica* che ne descrive il comportamento. Come può il fotone "decidere" se essere riflesso o trasmesso all'interfaccia?

Interpretazione statistica

which way a given photon will go. Philosophers have said that if the same circumstances don't always produce the same results, predictions are impossible and science will collapse. Here is a circumstance—identical photons are always coming down in the same direction to the same piece of glass—that produces different results. We cannot predict whether a given photon will arrive at A or B. All we can predict is that out of 100 photons that come down, an average of 4 will be reflected by the front surface. Does this mean that physics, a science of great exactitude, has been reduced to calculating only the *probability* of an event, and not predicting exactly what will happen? Yes. That's a retreat, but that's the way it is: Nature permits us to calculate only probabilities. Yet science has not collapsed.

The situation today is, we haven't got a good model to explain partial reflection by two surfaces; we just calculate the probability that a particular photomultiplier will be hit by a photon reflected from a sheet of glass. I have chosen this calculation as our first example of the method provided by the theory of quantum electrodynamics. I am going to show you "how we count the beans"—what the physicists do to get the right answer. I am not going to explain how the photons actually "decide" whether to bounce back or go through; that is not known. (Probably the question has no meaning.) I will only show you how to calculate the correct *probability* that light will be reflected from glass of a given thickness, because that's the only thing physicists know how to do! What we do to get the answer to *this* problem is analogous to the things we have to do to get the answer to *every other* problem explained by quantum electrodynamics.

You will have to brace yourselves for this—not because it is difficult to understand, but because it is absolutely ridiculous: All we do is draw little arrows on a piece of paper—that's all!

Feynman scrive "non abbiamo un modello", con il che presumibilmente intende non abbiamo un modello nel senso in cui lo intendeva Maxwell, ossia un modello *meccanico*.

Considerare le spiegazioni di tipo classico/"realista"

There are several possible theories that you could make up to account for the partial reflection of light by glass. One of them is that 96% of the surface of the glass is "holes" that let the light through, while the other 4% of the surface is covered by small "spots" of reflective material (see Fig. 3). Newton realized that this is not a possible explanation.[1] In just a moment we will encounter a strange feature of partial reflection that will drive you crazy if you try to stick to a theory of "holes and spots"—or to any other reasonable theory!

Another possible theory is that the photons have some kind of internal mechanism—"wheels" and "gears" inside that are turning in some way—so that when a photon is "aimed" just right, it goes through the glass, and when it's not aimed right, it reflects. We can check this theory by trying to filter out the photons that are not aimed right by putting a few extra layers of glass between the source and the first layer of glass. After going through the filters, the photons reaching the glass should *all* be aimed right, and none of them should reflect. The trouble with that theory is, it doesn't agree with experiment: even after going through many layers of glass, 4% of the photons reaching a given surface reflect off it.

Try as we might to invent a reasonable theory that can

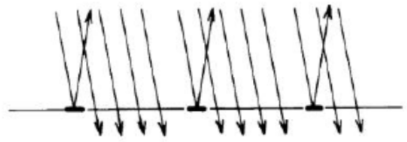


FIGURE 3. *One theory to explain partial reflection by a single surface involves a surface made up mainly of "holes" that let light through, with a few "spots" that reflect the light.*

explain how a photon "makes up its mind" whether to go through glass or bounce back, it is impossible to predict which way a given photon will go. Philosophers have said that if the same circumstances don't always produce the same results, predictions are impossible and science will collapse. Here is a circumstance—identical photons are always coming down in the same direction to the same piece of glass—that produces different results. We cannot predict whether a given photon will arrive at A or B. All we can predict is that out of 100 photons that come down, an average of 4 will be reflected by the front surface. Does

La strategia di Feynman nella prima parte di *QED*

Possiamo riassumendo afermare che la prima parte di *QED* afronta i seguenti punti:

- Perchè i fisici sono convinti che il fotone esista?
- Quali problemi concettuali nascono per interpretare i fenomeni noti, se la luce è composta di fotoni? E' possibile, almeno in linea di principio, spiegare fenomeni che appaiono ondulatori?
- Sono state considerate spiegazioni classiche, o comunque "realiste", cioè basate su un modello di tipo meccanicista, prima di arrivare alla fisica quantistica?

Questo è essenzialmente quello che viene fatto nel percorso di Pavia, se si eccettua il fatto che, per l'ultimo punto, noi non ci preoccupiamo tanto delle spiegazioni alternative storiche, ma delle teorie, diciamo *ingenue*, che gli studenti potrebbero costruire per spiegare tali fenomeni. Nel percorso di Pavia, inoltre, si cerca di farlo affrontando, nel frattempo, alcuni degli argomenti previsti nelle Indicazioni Nazionali.

Il fotone e le sue proprietà

Punti essenziali:

- Effetto fotoelettico ed effetto Compton (prove storiche dell'esistenza del fotone, attribuzione ad esso di energia $E=hf$ e quantità di moto $p=hf/c$).
- Doppia fenditura con un fotone alla volta (prova "visiva" dell'esistenza del fotone, necessità di una interpretazione statistica, confutazione della possibile teoria meccanicista per cui l'interferenza si produce perchè i fotoni interagiscono tra loro).
- Esperimento di Grangier (indivisibilità del fotone e prova definitiva della sua esistenza, confutazione di possibili teorie meccaniciste per le quali il fotone si divide in parti)

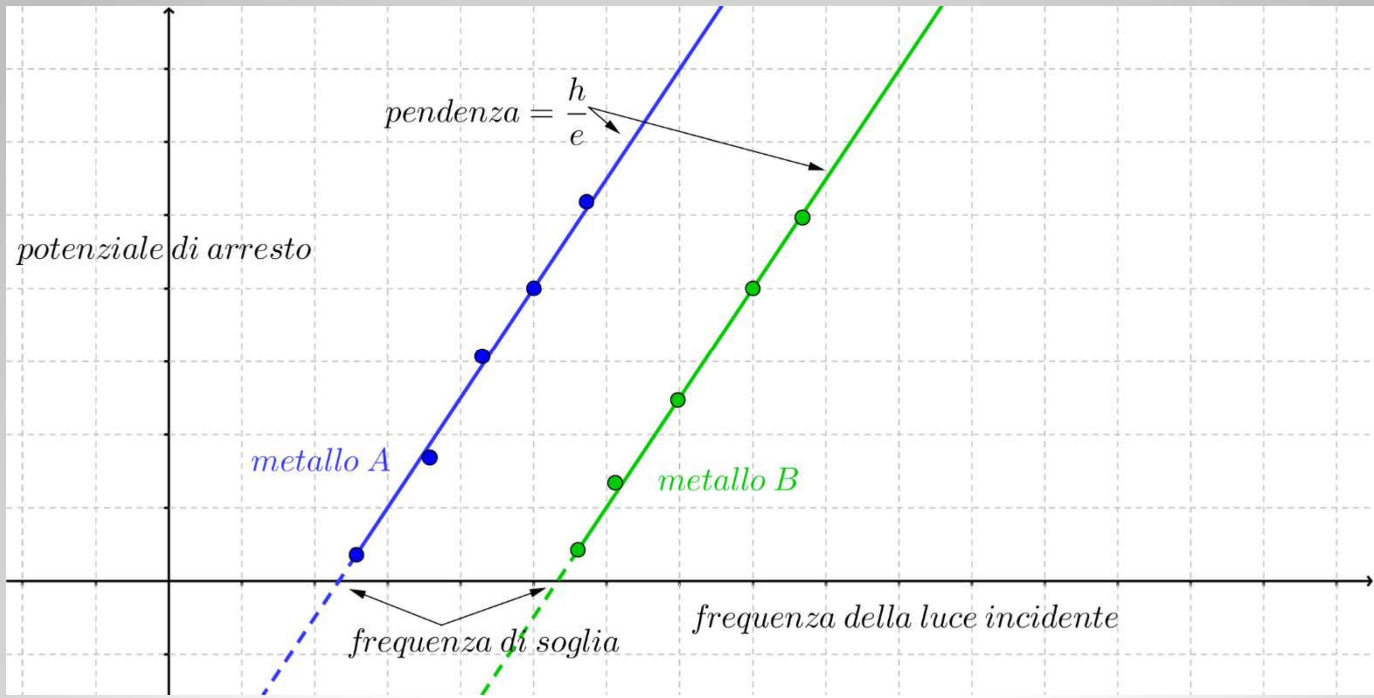
Va notato che in molti testi l'esperimento di Grangier è considerato non solo la prova dell'indivisibilità del fotone, ma anche la vera prova definitiva della sua esistenza. Il fatto che non venga citato in *QED* è molto probabilmente dovuto solo al fatto che il libro uscì nel 1985, mentre l'esperimento è del 1986.

Caratteristiche dell'effetto fotoelettrico

- Non vi è alcun ritardo di tempo misurabile tra il momento in cui la superficie viene illuminata e l'emissione dei fotoelettroni.
- C'è un effetto soglia sulla frequenza: un valore minimo di frequenza prima del quale nessun fotoelettrone viene emesso.
- Oltre tale soglia, aumentare l'intensità della radiazione incidente incrementa il *numero* di fotoelettroni emessi per unità di tempo, ma non la loro energia cinetica massima.
- L'energia degli elettroni emessi (spesso misurata in termini del "potenziale di arresto") aumenta, invece, all'aumentare della *frequenza* della radiazione incidente.

Modello di Einstein

Einstein spiega l'effetto fotoelettrico ipotizzando (proseguendo sulla linea tracciata da Planck) che l'energia della radiazione elettromagnetica che interagisce con gli elettroni sia *quantizzata* in "pacchetti" discreti di energia E = h ·f.



$$E_{c,max} = h \cdot f \; - W_0$$

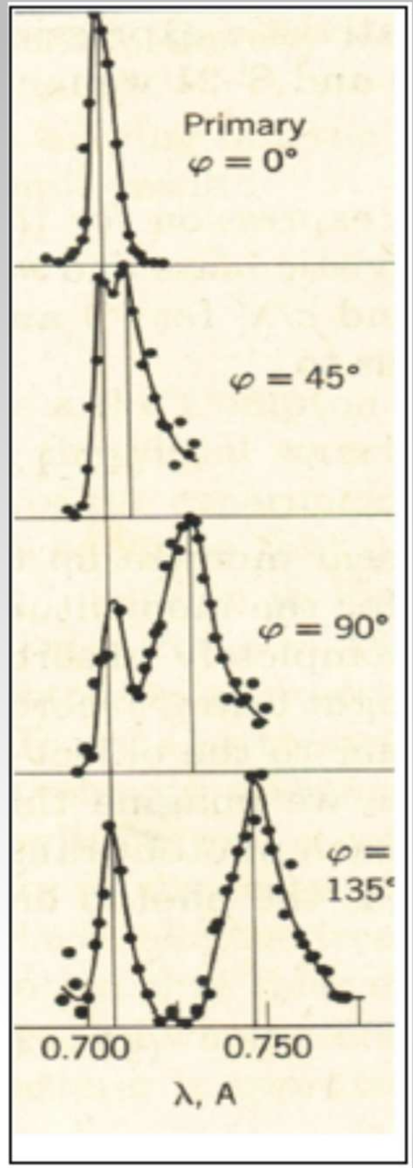
Problemi didattici riscontrati svolgendo l'esperimento con studenti che avevano già trattato l'effetto a scuola.

- Gli studenti spesso non sono in grado di spiegare a parole cosa sia l'effetto fotoelettrico.
- Gli studenti spesso pensano che l'effetto fotoelettrico sia un fenomeno non previsto, in nessuna forma, dalla fisica classica (iper-semplificazione storica).
- Gli studenti spesso non hanno chiaro perchè la radiazione elettromagnetica (luce) dovrebbe interagire con l'elettrone.
- Gli studenti spesso pensano che nell'effetto fotoelettrico tutto debba dipendere solo dalla frequenza, niente dall'intensità
- Molti studenti non conoscono il comportamento ondulatorio della luce (e molti, anche se qui non c'entra, non conoscono nemmeno l'ottica geometrica).
- Talvolta gli studenti non sanno cosa voglia dire interpolare dei dati con una retta sperimentale, e ricorrono al metodo di prendere due punti a caso e trovare la retta per due punti (risultato probabilmente degli esercizi dei libri con dati sperimentali fittizi, quasi perfettamente allineati).

L' effetto Compton

L’effetto Compton fu osservato per la prima volta nel 1922 da Arthur Compton. Inviando un fascio collimato di raggi X ($\lambda \approx 70$ pm) su un bersaglio di grafite, e osservando lo spettro della radiazione diffusa, egli si rese conto di uno spostamento in lunghezza d’onda (per gran parte dei fotoni) dipendente dall’angolo con cui i fotoni venivano deviati.

La teoria ondulatoria della luce è incapace di spiegare questa variazione di lunghezza d’onda.



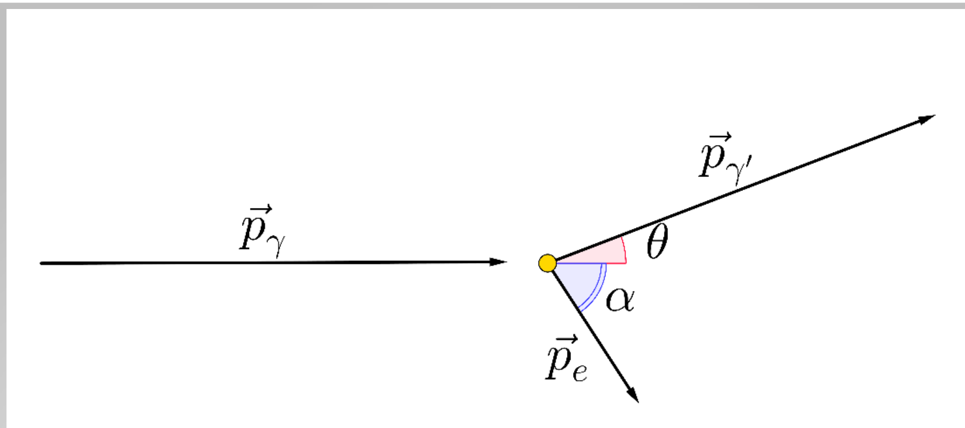
La dipendenza che si osserva tra la variazione di lunghezza d'onda del fotone e l'angolo secondo cui esso viene deviato è

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c}\left(1 - \cos\theta\right)$$

La quantità $h / (m_e c)$ ha le dimensioni di una lunghezza e prende il nome di *lunghezza (d'onda) Compton* dell'elettrone. L'effetto Compton è apprezzabile solo quando la lunghezza d'onda della radiazione incidente è confrontabile con la lunghezza d'onda Compton ($\lambda_e \approx 2.43$ pm).

La frazione dei fotoni deflessi che non subisce variazione di lunghezza d'onda, visibile nei dati, è dovuta al fatto che una parte dei fotoni non colpisce elettroni, ma gli atomi stessi, che hanno una lunghezza d'onda Compton molto minore.

L’effetto Compton può essere analizzato come un urto elastico tra un fotone ed un elettrone.



Per spiegare il fenomeno descritto è necessario supporre che al fotone sia associata non soltanto un’energia E = h ·f ma anche una quantità di moto

$$p_\gamma = \frac{h}{\lambda} = \frac{h \cdot f}{c}$$

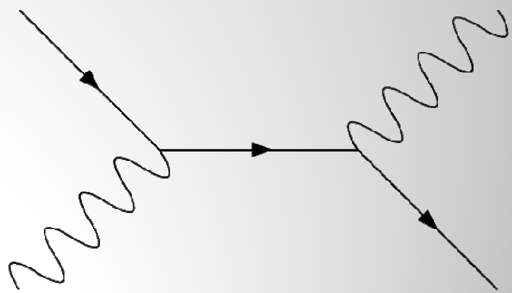
Per una derivazione esatta è necessario applicare le leggi della relatività speciale.

L'effetto Compton e l'effetto fotoelettrico sono coerenti?

Nel caso dell'effetto fotoelettrico si sostiene che il fotone cede all'elettrone tutta la sua energia. Al contrario, nel caso dell'effetto Compton il fotone non viene assorbito, ma deviato, cedendo all'elettrone solo una parte della sua quantità di moto e della sua energia. Le due descrizioni sono coerenti?

Tre questioni da considerare:

1. Se il bersaglio utilizzato per l'effetto fotoelettrico fosse una sottile lamina di un semiconduttore che può anche produrre effetto fotoelettrico, ci si aspetta comunque che parte della luce sia riflessa e parte trasmessa. La luce riflessa o trasmessa ma deviata deriva comunque da interazione con elettroni, quindi l'effetto Compton avviene comunque, ma nel caso della luce visibile la variazione di lunghezza d'onda non è osservabile.
2. Al livello della nostra migliore descrizione della natura, la QED, anche l'"urto" elettrone-fotone è un processo di assorbimento e riemissione. Da questo punto di vista quindi è sempre vero che l'elettrone assorbe tutta l'energia del fotone, solo che quasi immediatamente emette un nuovo fotone (con minore energia, nel caso dell'effetto Compton)
3. Per un dato setup sperimentale, e per ogni dato fotone, la probabilità che avvenga l'effetto fotoelettrico (assorbimento di un fotone e trasformazione della sua energia in energia cinetica) o l'effetto Compton (assorbimento di un fotone e emissione di un secondo fotone, di minore energia) dipende dall'energia del fotone: l'effetto fotoelettrico è più probabile a basse energie, l'effetto Compton ad energie intermedie (raggi x – raggi gamma).



Quindi il fotone:

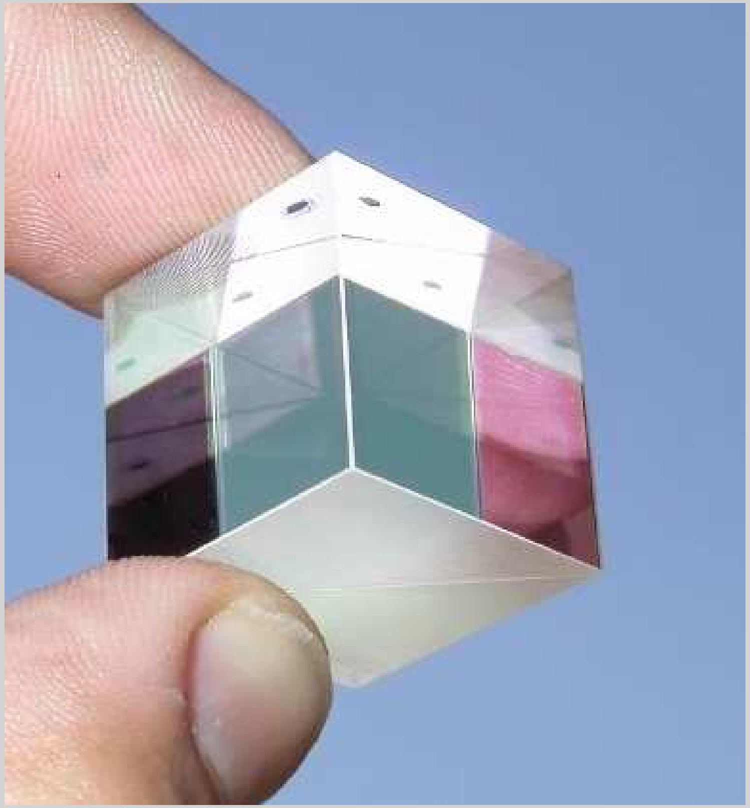
- E' un oggetto quantistico indivisibile (esperimento di Grangier)
- Ha energia proporzionale alla frequenza (relazione di Planck $E = h f$, desumibile dall'effetto fotoelettrico)
- Ha velocità pari a c, indipendentemente dal sistema di riferimento (relatività speciale)
- Ha lunghezza d'onda nel vuoto pari a $\lambda = c/f$
- Ha quantità di moto $p = E/c = h/\lambda$

Doppia fenditura con un fotone alla volta

L'esperimento riassume in modo chiaro almeno tre concetti: 1) il fotone esiste; 2) la figura di interferenza non si forma perchè i fotoni interferiscono tra di loro; 3) è necessaria un'interpretazione statistica della fenomenologia macroscopica della luce, il che significa che il comportamento del singolo fotone può essere spiegato in base ad una legge probabilistica.

Il beam splitter e l'indivisibilità del fotone

Dal 1980 in poi si è sviluppata un'intera branca della fisica, l'ottica quantistica, che si occupa di studiare il comportamento e le caratteristiche dei fotoni.

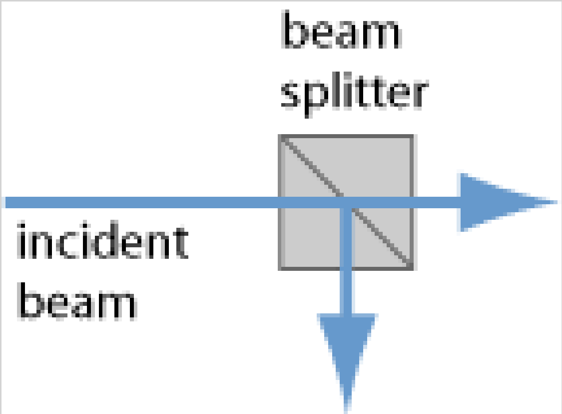


*Un **beam splitter** (divisore di fascio) è un elemento base degli esperimenti di ottica, anche classica, e in particolare degli interferometri. Esso può essere costituito da due prismi triangolari incollati alla loro base mediante una colla. Lo spessore dello strato di resina è tale che, per un certo intervallo di lunghezze d'onda, metà della luce incidente attraverso la "porta" uno (ossia una faccia del cubo) sia riflessa e che l'altra metà sia trasmessa.*

Il beam splitter e l'indivisibilità del fotone

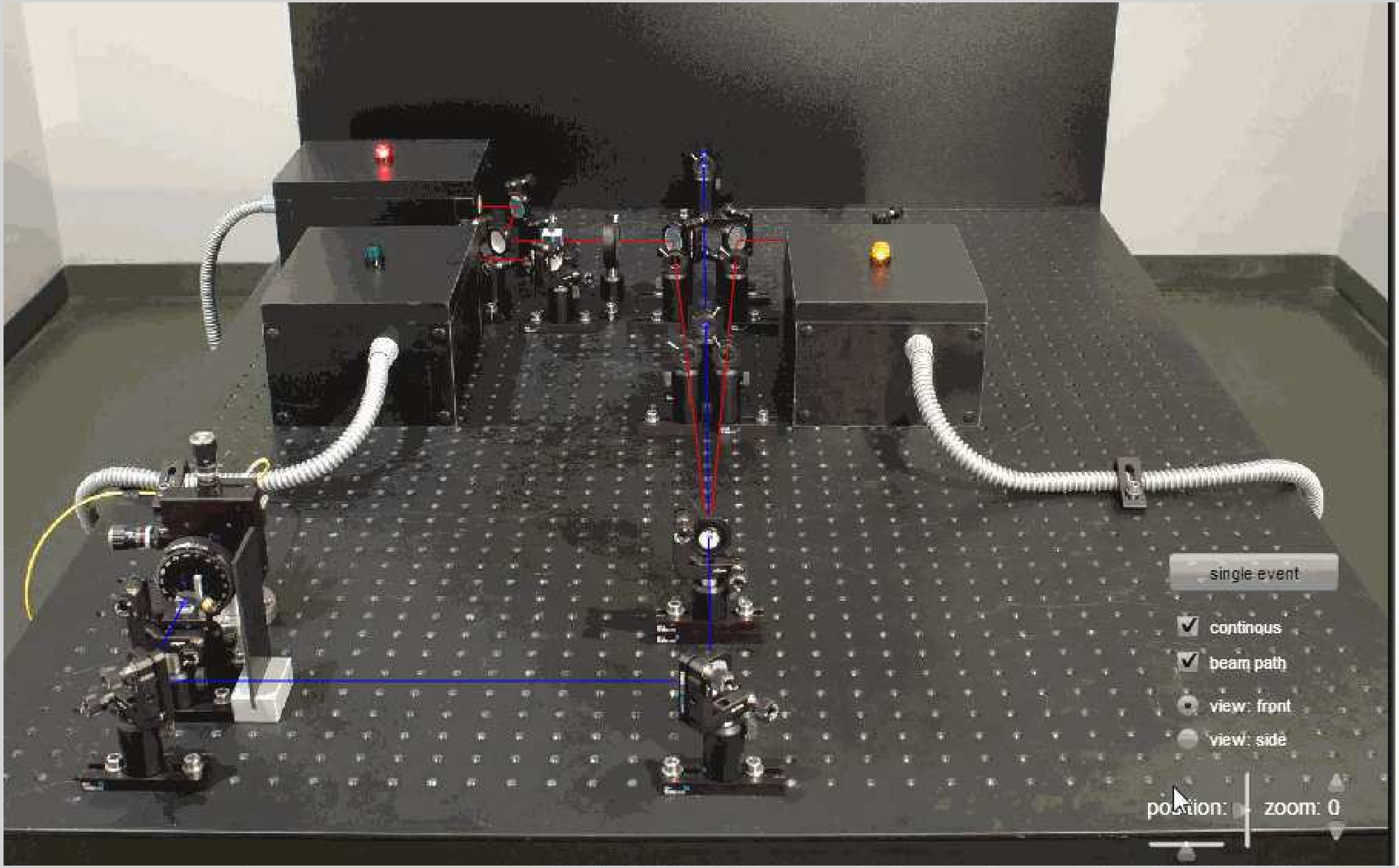
La caratteristica principale del beam splitter è che, se un raggio di luce collimata (ad es. una luce laser) viene diretta contro la sua faccia di ingresso, una percentuale fissata (solitamente il 50%) dell'intensità luminosa viene riflessa, secondo le normali leggi di riflessione, dalla faccia "diagonale" interna, mentre il resto della luce viene trasmessa indisturbata.

Questo origina una domanda: cosa accade quando viene indirizzato verso il beam splitter un singolo fotone?



La meccanica quantistica fornisce una previsione per il risultato di questo esperimento, ma esso fu realizzato solo nel 1986.

Esperimento di Grangier



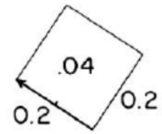
Il modello di Feynman

—Grand Principle: The probability of an event is equal to the square of the length of an arrow called the "probability amplitude." An arrow of length 0.4, for example, represents a probability of 0.16, or 16%.

—General Rule for drawing arrows if an event can happen in alternative ways: Draw an arrow for each way, and then combine the arrows ("add" them) by hooking the head of one to the tail of the next. A "final arrow" is then drawn from the tail of the first arrow to the head of the last one. The final arrow is the one whose square gives the probability of the entire event.

We start by considering the various *ways* that a photon

Figure 6. *The strange feature of partial reflection by two surfaces has forced physicists away from making absolute predictions to merely calculating the probability of an event. Quantum electrodynamics provides a method for doing this—drawing little arrows on a piece of paper. The probability of an event is represented by the area of the square on an arrow. For example, an arrow representing a probability of 0.04 (4%) has a length of 0.2.*



could get from the source to the photomultiplier at A. Since I am making this simplification that the light bounces off either the front surface or the back surface, there are two possible ways a photon could get to A. What we do in this case is to draw *two* arrows—one for each way the event can happen—and then combine them into a "final arrow"

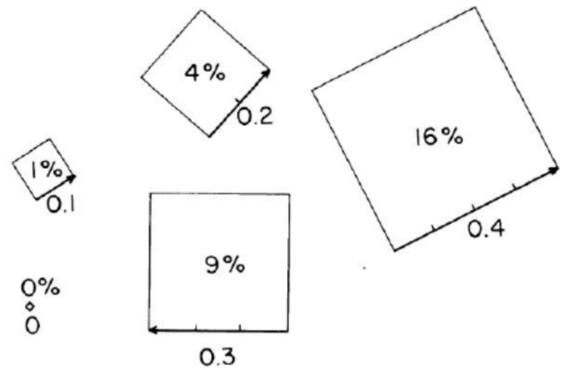
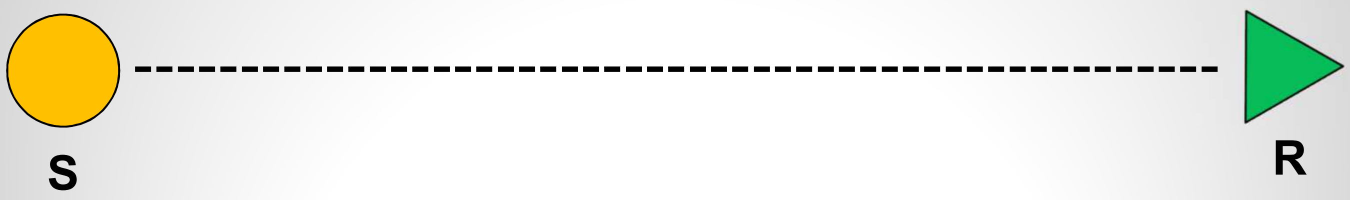


Figure 7. *Arrows representing probabilities from 0% to 16% have lengths of from 0 to 0.4.*

Cammini di Feynman, primo livello di approfondimento

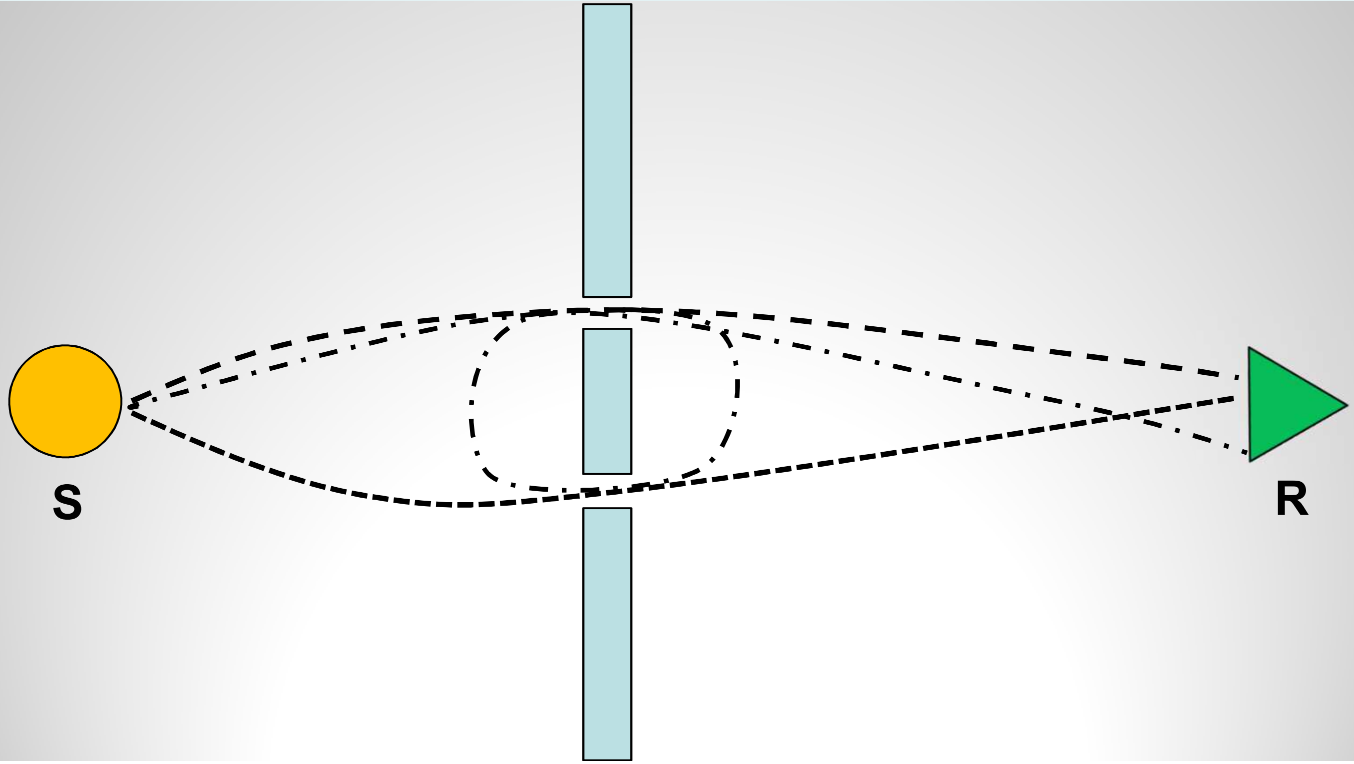
- Il sistema ha <u>una sola sorgente</u> **S** che emette un fotone a <u>energia precisamente fissata</u> e <u>un solo rivelatore</u> **R** che è in grado di rivelarlo, se il fotone arriva ad esso, <u>con efficienza del 100%</u>. Naturalmente, il rivelatore può essere spostato per confrontare la probabilità di rivelare il fotone in diversi punti.

Tutte le proprietà sottolineate sono assunzioni che vengono fatte per semplificare: naturalmente possono essere fatti esperimenti con sistemi e apparati più complicati, l'energia del fotone può non essere precisamente determinata, l'efficienza del rivelatore può non essere del 100%. Sollevare ciascuna di queste assunzioni può avere, almeno in linea di principio, conseguenze non banali.



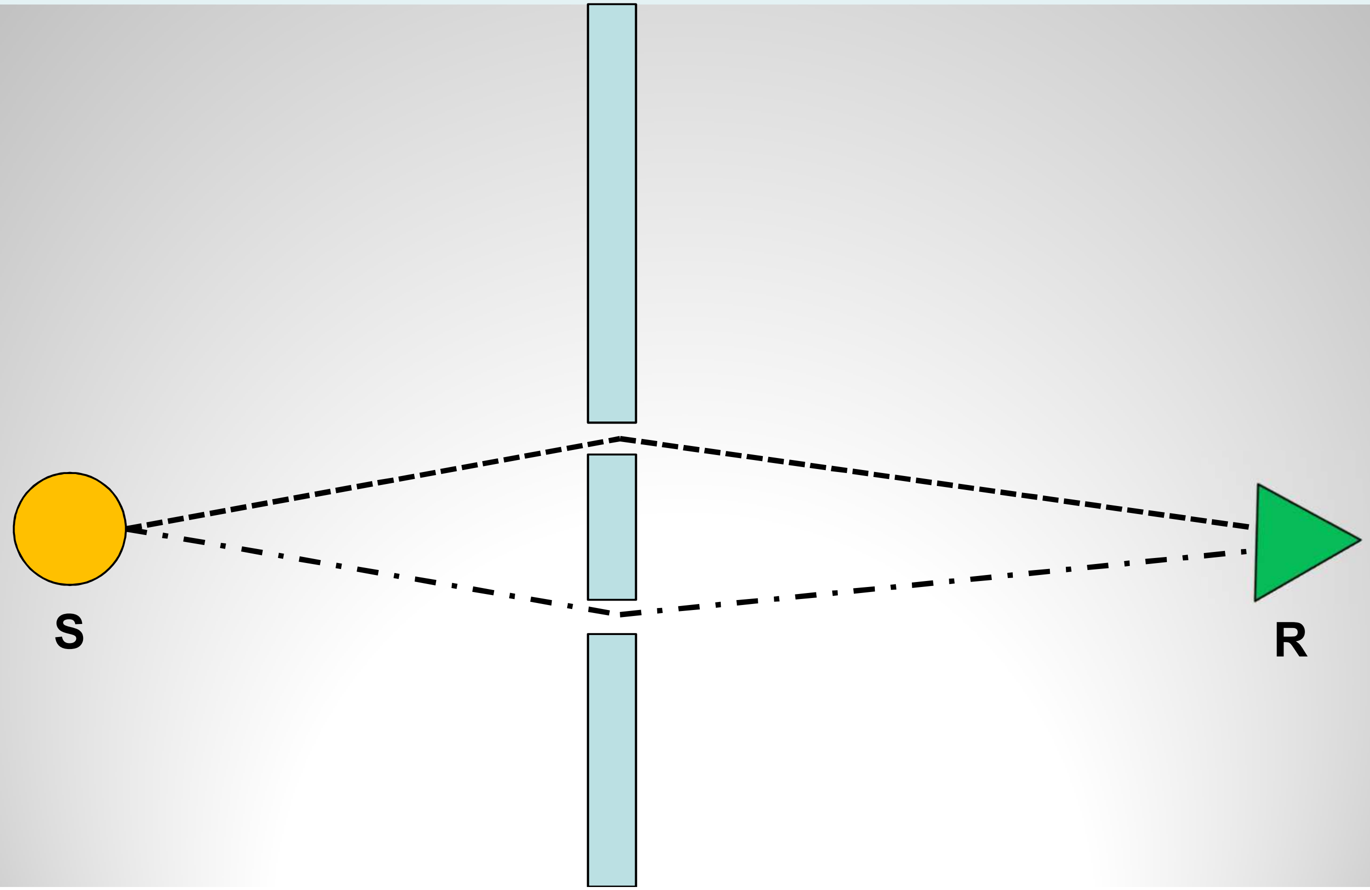
- Occorre ragionare *come se* (questo è, in altre parole, il nostro *modello*) il fotone percorresse tutti i possibili cammini tra sorgente e rivelatore. Con *possibili* intendiamo <u>tutti i cammini compatibili con i vincoli cinematici imposti al sistema</u> (ossia, il fotone non può attraversare i muri).

Quella sottolineata è, di nuovo, una semplificazione: in effetti il fotone *può* attraversare i muri, e i cammini che lo fanno andrebbero, a rigore, considerati; tuttavia l'ampiezza di probabilità (vedi in seguito) associata a tali cammini è talmente piccola che ignorarli non porta a nessuna conseguenza, mentre considerarli, ed assegnare loro un'ampiezza uguale agli altri, porterebbe a risultati errati. Questa semplificazione non verrà mai rimossa.



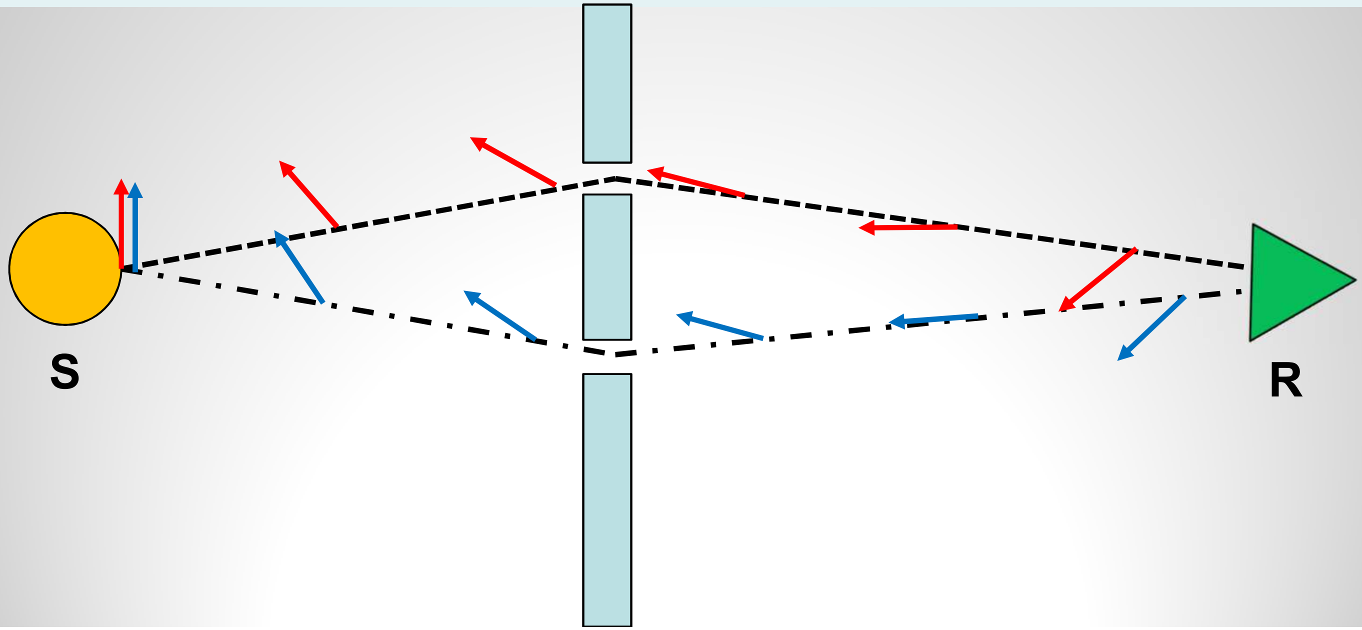
- Per fare i calcoli tuttavia, consideriamo solo i possibili cammini rettilinei a tratti composti di segmenti rettilinei che si raccordano tra loro (cioè curvano) solo agli ostacoli o alle restrizioni che il fotone deve superare per arrivare alla sorgente.

Una nuova assunzione semplificativa, ed anche in questo caso è possibile dimostrare che questa scelta cambia di pochissimo il risultato finale. Anche questa semplificazione non verrà mai rimossa.



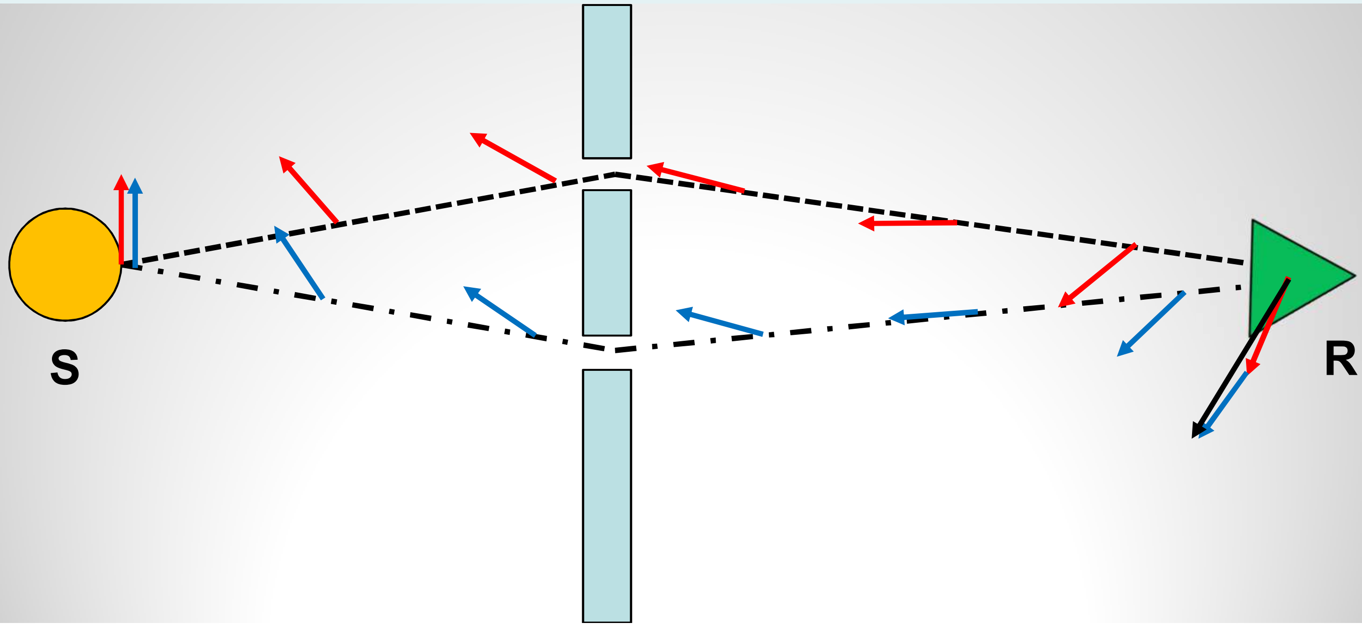
- Ad ogni cammino è assegnata una freccina convenzionale, o vettore, chiamato anche *ampiezza di probabilità,* che compie un giro per ogni lunghezza d'onda, ossia ha una fase $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi x}{\lambda}$ dove *x* è la lunghezza del tratto di cammino percorso. La fase iniziale φ_0 non ha alcuna rilevanza ed è del tutto arbitraria (può essere sempre scelta uguale a zero). Assumiamo che la freccina abbia lunghezza unitaria.

Il fatto che la freccina compia un giro ogni lunghezza d'onda è legata all'ipotesi precedente di energia precisamente definita. Se l'energia non fosse precisamente definita, occorrerebbe considerare anche l'istante di emissione, e la fase sarebbe dipendente anche dal tempo, ossia $\varphi = \varphi_0 + \frac{2\pi x}{\lambda} - \omega t,$ e andrebbero considerati tutti i cammini con tutte le possibili λ e ω (che non sarebbero fissate, perchè non lo sarebbe l'energia). Nel percorso noi consideriamo solo sistemi in cui l'energia è precisamente fissata, con fase indipendente dal tempo. Al contrario, l'assunzione che la lunghezza della freccina sia sempre unitaria sarà in seguito sollevata.



- Per calcolare la probabilità che il fotone venga rivelato dal rivelatore posto in una particolare posizione (probabilità dell'*evento di rivelazione*) occorre sommare come vettori le freccine, così come esse arrivano al rivelatore, e trovare l'*ampiezza risultante.* La probabilità di rivelazione in ciascun punto dello spazio sarà proporzionale al quadrato dell'ampiezza risultante se il rivelatore è posto in quel punto.

In questo schema (ampiezza sempre di unghezza unitaria), per trovare una probabilità assoluta occorre normalizzare le probabilità a posteriori, imponendo che la probabilità di trovare il fotone emesso in uno dei punti dello spazio sia uno. Questa semplificazione è utile quando si è interessati a trovare i massimi e i minimi della probabilità, e non il loro valore assoluto. E' possibile, invece, normalizzare a priori le ampiezze; in questo caso la probabilità è *uguale* e non solo proporzionale al quadrato dell'ampiezza risultante. Nel seguito delle lezioni impareremocome normalizzare le ampiezze.



Analisi della doppia fenditura

I passaggi matematici sono essenzialmente gli stessi che si effettuano per l'analisi dal punto di vista dell'ottica ondulatoria; ad essi è associata tuttavia una diversa interpretazione, e viene costruito un diverso linguaggio. Anzichè di fase dell'onda si parlerà di fase del vettore associato ad un dato cammino, ed anzichè di massimi e minimi di interferenza dell'onda si parlerà di massima o minima probabilità di rivelare il fotone in un dato punto dello spazio. L'interpretazione usuale dell'esperimento della doppia fenditura viene recuperata attraverso la legge dei grandi numeri: se si inviano contro lo schermo un gran numero di fotoni, essi si accumuleranno nelle zone dove la probabilità di rivelazione è maggiore, mentre ben pochi saranno rivelati nei punti vicini a quello in cui è nulla, producendo le bande chiare e scure che si osservano nella figura di interferenza.

Forse il principale vantaggio del metodo dei cammini di Feynman è quello di dare agli studenti un metodo matematico, e un linguaggio, con cui trattare semplici fenomeni quantistici. E' importante che familiarizzino con esso. Semplici esercizi, ad esempio determinare i massimi e i minimi di interferenza nel caso di tre, o quattro fenditure, possono aiutare a sviluppare abilità procedurali.

Doppia fenditura: https://www.geogebra.org/m/efBI3J9a

Alcune simulazioni

Diffrazione da singola fenditura

https://www.geogebra.org/m/VljzT1uw

Doppia fenditura con fenditure estese

https://www.geogebra.org/m/GALGGPlo

Reticolo di diffrazione

https://www.geogebra.org/m/AHDnFdMx

Le tre simulazioni rappresentano casi che si possono costruire sperimentalmente in modo abbastanza semplice, se la scelta fosse quella di minimizzare il supporto teorico e rafforzare gli aspetti sperimentali.

Costruire un percorso semplificato al massimo

- La parte iniziale del percorso, volta a costruire un modello mentale adeguato del fotone: l'effetto fotoelettrico, l'effetto compton, l'esperimento di Grangier
- Sistemi di fenditure (singola, doppia, tripla, reticoli)
- Estensione agli oggetti quantistici massivi (lunghezza d'onda di De Broglie) ed esperimenti analoghi (es. diffrazione di elettroni...)
- Giustificare il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto tramite la diffrazione da singola fenditura con larghezza variabile.
- Enunciare il principio di indeterminazione energia-tempo e discutere come esso sia incorporato nel modello utilizzato.
- Giustificare il modello semiclassico dell'atomo di Bohr
- Il principio di corrispondenza (limite di piccole lunghezze d'onda)

Cosa rimane fuori dal percorso semplificato?

- Il Mach-Zehnder (non può essere spiegato senza la regola aggiuntiva per la riflessione).
- L'effetto di misure *which way* sull'indistinguibilità dei cammini e l'esperimento di Zhou-Wang-Mandel (richiedono, almeno concettualmente, che nel sistema sia presente più di un rivelatore).
- Sistemi unidimensionali risonanti/confinati (richiedono di discutere la normalizzazione delle ampiezze, oppure, nel caso della buca di potenziale infinita, almeno la regola per la riflessione).

Prima però di completare la discussione di un possibile percorso semplificato, vediamo come conclude Feynman (almeno fino alla fine del capitolo 1) il suo percorso divulgativo.

Una regola aggiuntiva per la riflessione

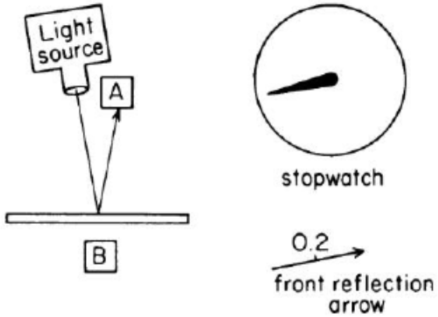
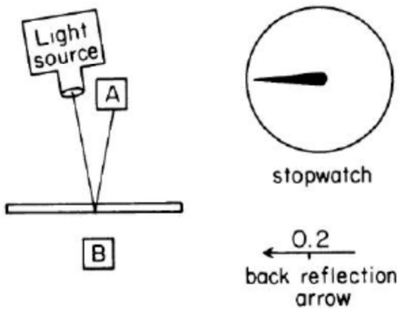


FIGURE 10. *In an experiment measuring reflection by two surfaces, we can say that a single photon can arrive at A in two ways—via the front or back surface. An arrow of length 0.2 is drawn for each way, with its direction determined by the hand of a "stopwatch" that times the photon as it moves. The "front reflection" arrow is drawn in the direction* opposite *to that of the stopwatch hand when it stops turning.*

FIGURE 11. *A photon bouncing off the back surface of a thin layer of glass takes slightly longer to get to A. Thus, the stopwatch hand ends up in a slightly different direction than it did when it timed the front reflection photon. The "back reflection" arrow is drawn in the* same *direction as the stopwatch hand.*



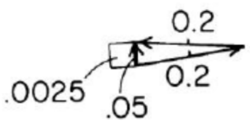


FIGURE 12. *The final arrow, whose square represents the probability of reflection by an extremely thin layer of glass, is drawn by adding the front reflection arrow and the back reflection arrow. The result is nearly zero.*

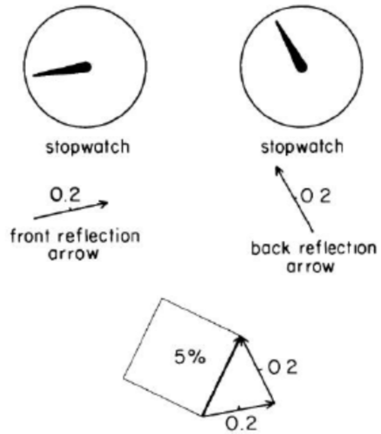


FIGURE 13. *The final arrow for a slightly thicker sheet of glass is a little longer, due to the greater relative angle between the front and back reflection arrows. This is because a photon boucing off the back surface takes a little longer to reach A, compared to the previous example.*

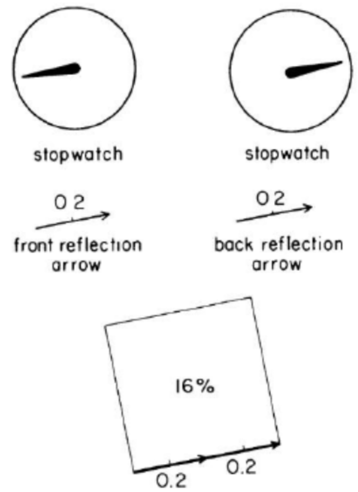
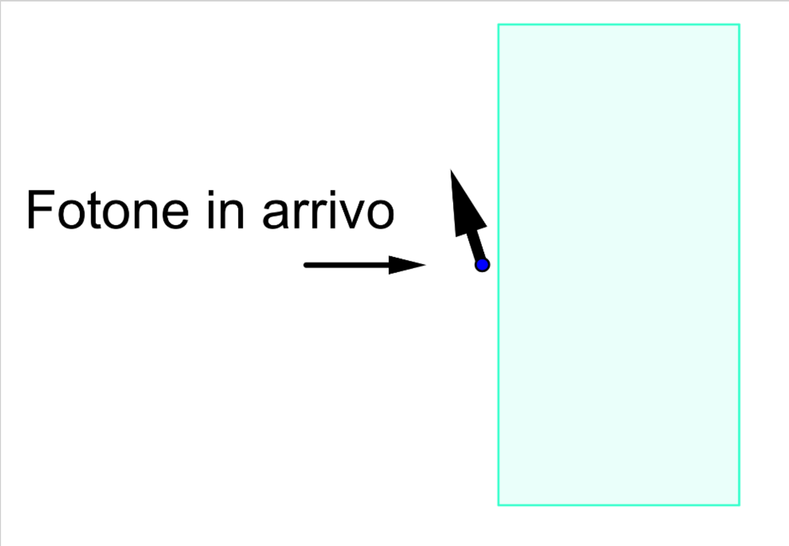
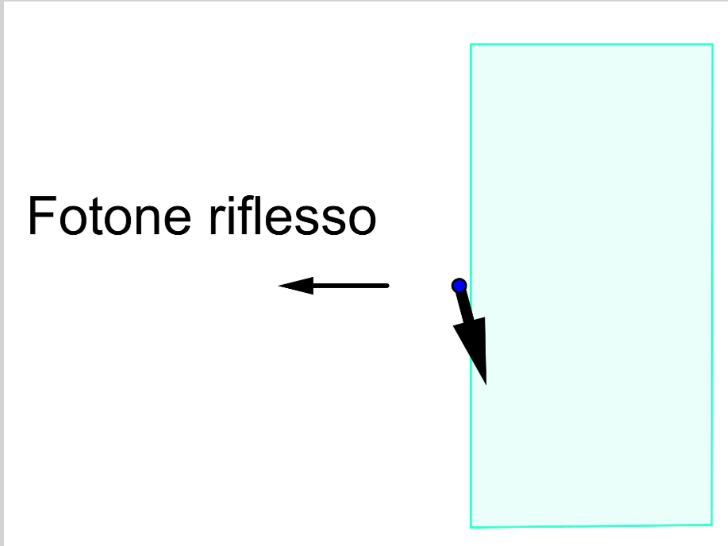


FIGURE 14. *When the layer of glass is just thick enough to allow the stopwatch hand timing the back reflecting photon to make an extra half turn, the front and back reflection arrows end up pointing in the same direction, resulting in a final arrow of length 0.4, which represents a probability of 16%.*

Una regola aggiuntiva per la riflessione

Se un cammino implica la riflessione del fotone all'interfaccia tra un mezzo con indice di rifrazione minore a uno con indice di rifrazione maggiore, il vettore associato a tale cammino riceve uno sfasamento di π (180°).

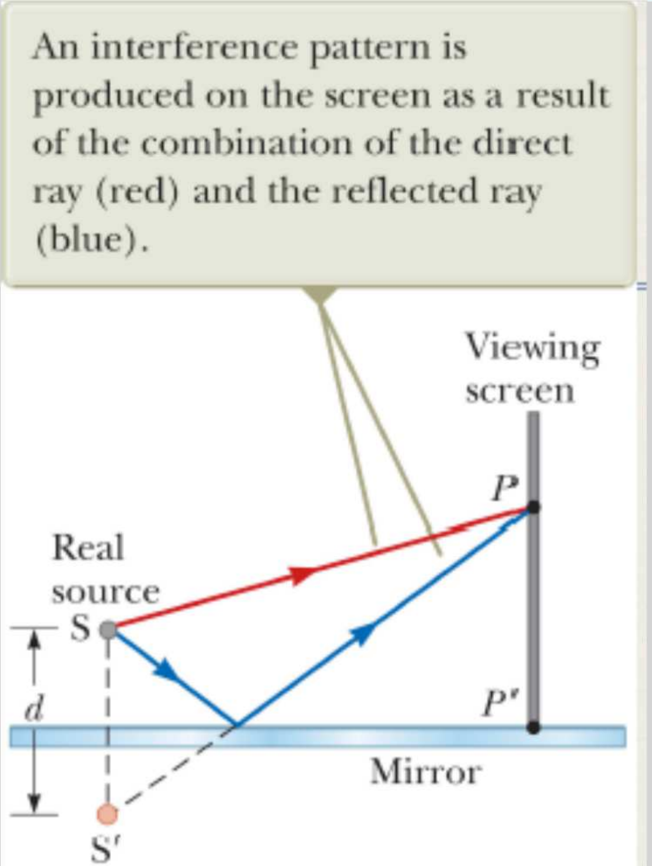




Analogamente al caso dell'ottica ondulatoria, lo sfasamento non avviene per riflessione «interna» , ossia da un materiale con indice di rifrazione maggiore, ad uno con indice di rifrazione minore.

Lo specchio di Lloyd

Esempio: utilizzando uno specchio, uno schermo ortogonale ad esso, ed una sorgente di luce coerente, si può ottenere interferenza su uno schermo tra il cammino riflesso e quello diretto.

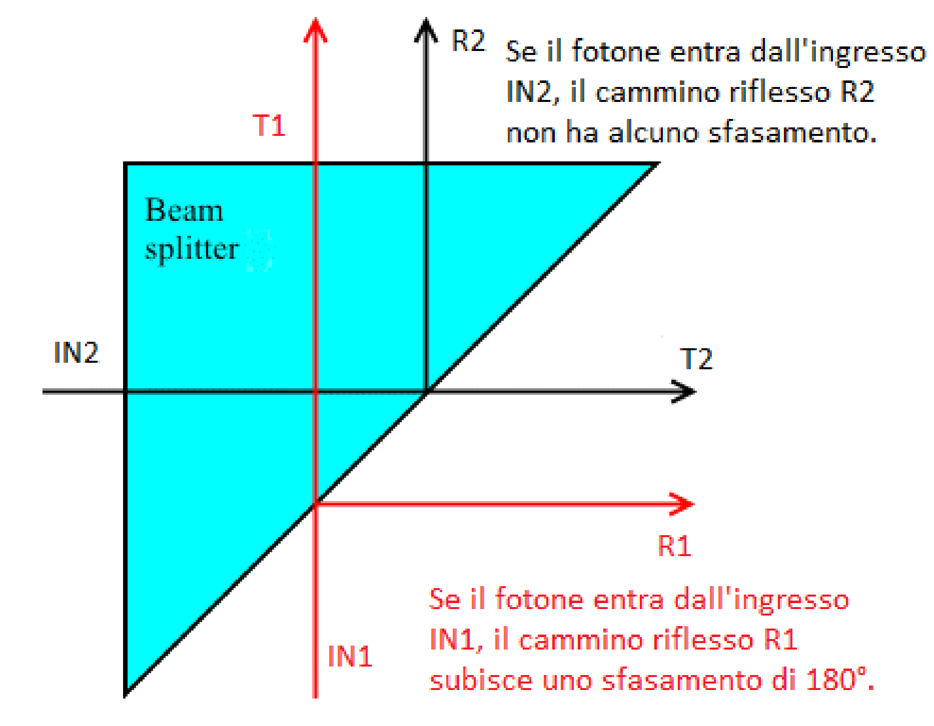


Nel punto dello schermo più vicino allo specchio si ha una frangia non illuminata, il che mostra lo sfasamento dovuto alla riflessione (i due cammini hanno la stessa lunghezza, ma interferiscono distruttivamente).

https://tube.geogebra.org/student/muN23BWVo

I divisori di fascio

La regola per la riflessione ha conseguenze importanti per i divisori di fascio:



Tali caratteristiche devono essere tenute presenti nell'analisi degli interferometri.

La soluzione formale del problema di Feynman

Le formule da spiegare sono:

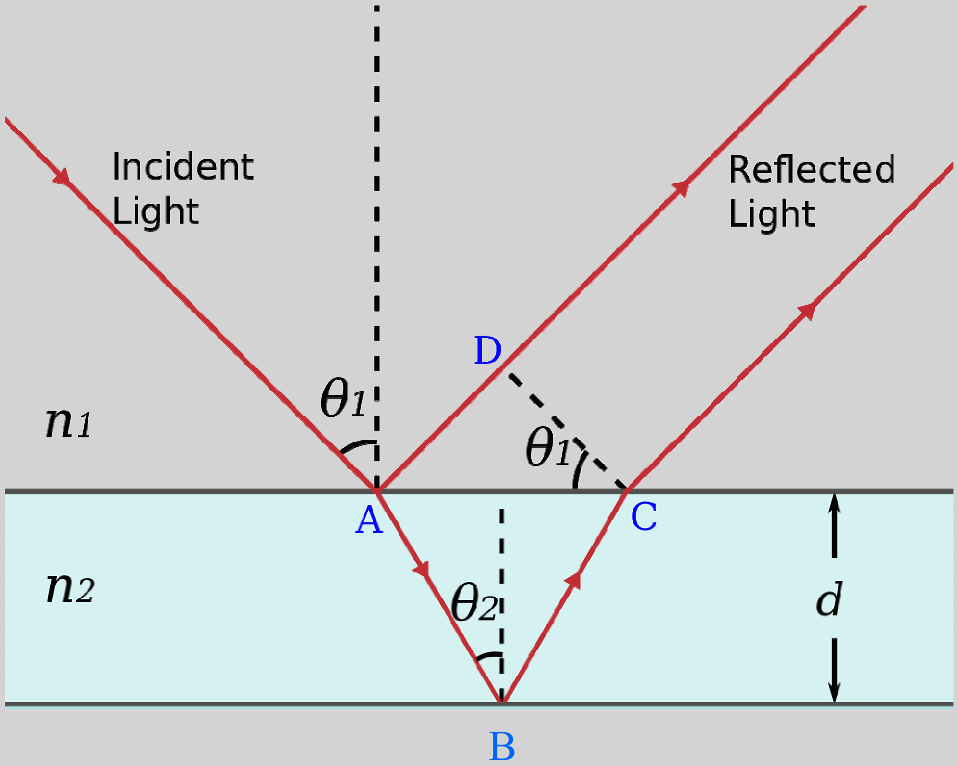
$$2n_2 d\cos\vartheta_2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$$

Per avere il massimo dei fotoni al rivelatore

$$2n_2 d\cos\vartheta_2 = (m)\lambda$$

Per avere il minimo dei fotoni al rivelatore. I due angoli θ_2 e θ_1 sono legati dalla Legge di Snell

$$n_2 \sin\vartheta_2 = n_1 \sin\vartheta_1$$

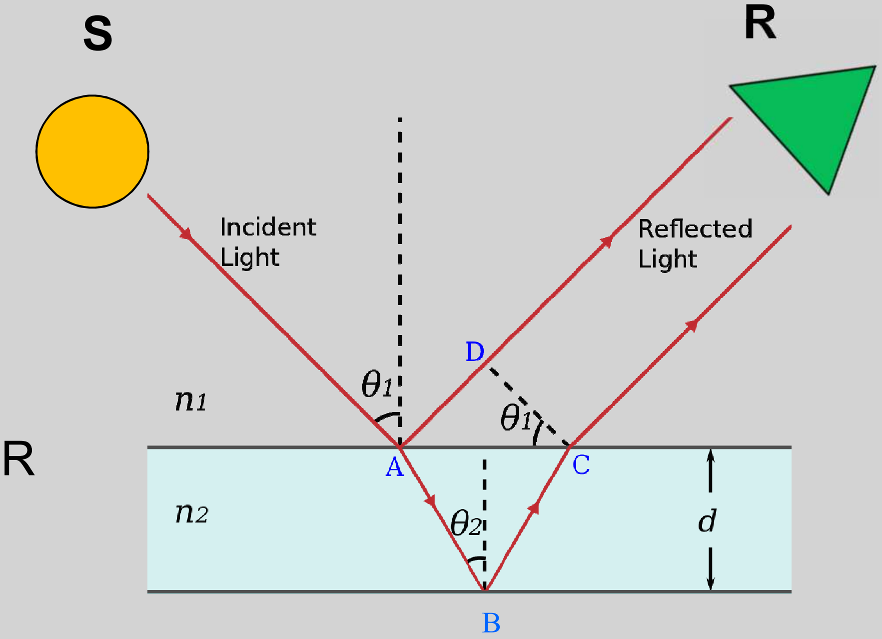


Nel caso considerato in figura, $n_2 > n_1$ e assumiamo $n_1 = 1$

La soluzione (con alcune osservazioni critiche)

Il fotone può andare dalla sorgente S al rivelatore R attraverso due cammini "principali", S-A-D-R e S-A-B-C-R. Queste due possibilità sono alternative e indistinguibili.

$2nd\cos\vartheta_2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda$



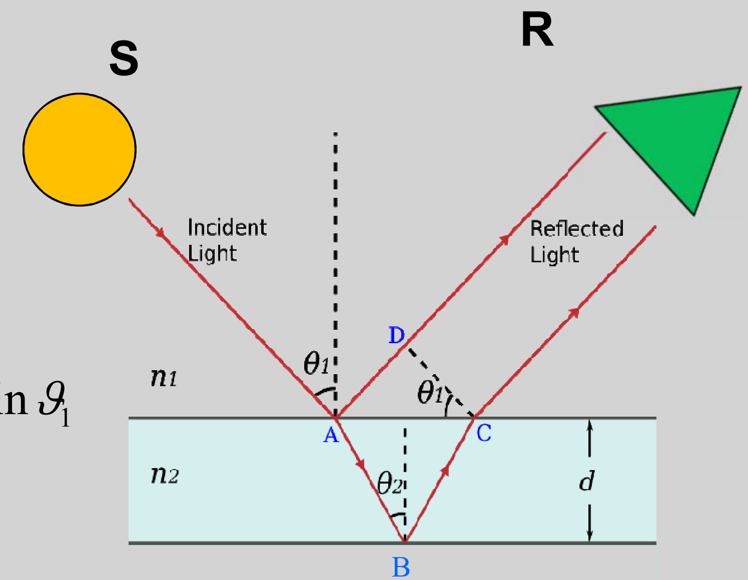
La freccina associata al cammino S-A-R ha una fase totale $\varphi_1 = \frac{2\pi}{\lambda_0} l(SAR) - \pi$ dove λ_0 è la lunghezza d'onda del fotone nell'aria (nel vuoto).

$2nd\cos\vartheta_2 = (m)\lambda$

La freccina associata al cammino S-A-B-C-R ha una fase totale $\varphi_2 = \frac{2\pi}{\lambda_0} l(SA) + \frac{2\pi}{\lambda_1} l(ABC) + \frac{2\pi}{\lambda_0} l(CR)$ dove λ_1 è la lunghezza d'onda del fotone nel mezzo.

La soluzione (con alcune osservazioni critiche)

Ma ciò che conta è la *differenza* tra le fasi delle due freccine. Tale differenza è data da $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0} l(AD) - \frac{2\pi}{\lambda_1} l(ABC) + \pi$. Si ha:



$$l(ABC) = 2\frac{d}{\cos\vartheta_2} \qquad l(AD) = AC\cos\vartheta_1 = 2d\tan\vartheta_2\sin\vartheta_1$$

E usando la legge di Snell

$$l(AD) = 2d\frac{n_2}{n_1}\tan\vartheta_2\sin\vartheta_2 = 2d\cdot n_2\frac{\sin^2\vartheta_2}{\cos\vartheta_2}$$

Quindi:

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi n_2}{\lambda_0}\frac{2d}{\cos\vartheta_2} - \frac{2\pi n_2}{\lambda_0}\frac{2d\sin^2\vartheta_2}{\cos\vartheta_2} + \pi = \frac{4\pi d n_2}{\lambda_0}\cos\vartheta_2 + \pi$$

La soluzione (con alcune osservazioni critiche)

La condizione di interferenza costruttiva è

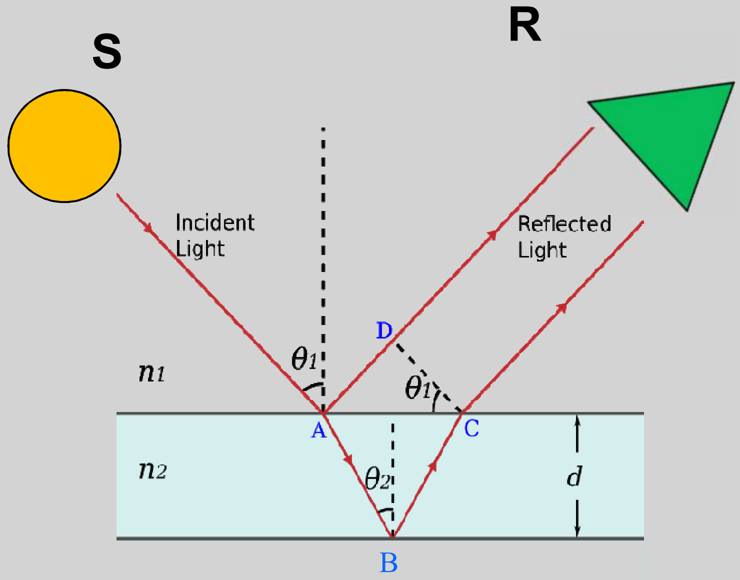
$$\Delta\varphi = 2m\pi$$

Da cui

$$\frac{4\pi d n_2}{\lambda_0}\cos\vartheta_2 + \pi = 2m\pi$$

E quindi:

$$2dn_2\cos\vartheta_2 = \left(m - \frac{1}{2}\right)\lambda_0$$



Analogamente per l'interferenza distruttiva $\Delta\varphi = (2m+1)\pi$ da cui

$$2dn_2\cos\vartheta_2 = m\lambda_0$$

Commenti:

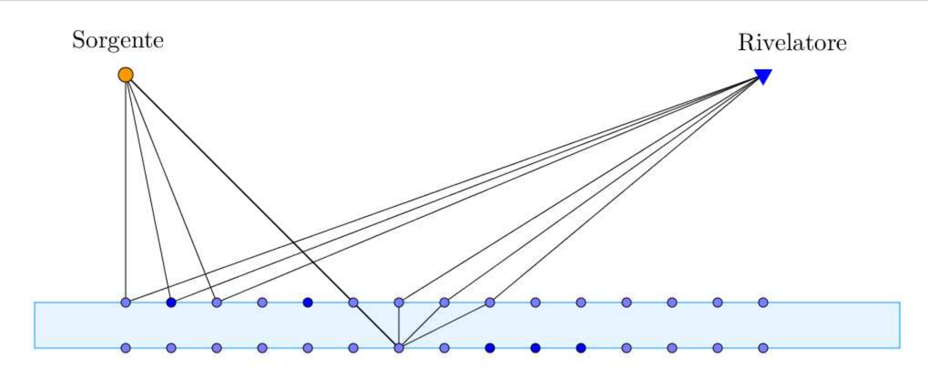
La soluzione adottata da Feynman in *QED* è certamente originale rispetto ad un esempio più "banale" come quello della doppia fenditura. Una sua applicazione immediata alla didattica avrebbe però alcuni problemi, e lascerebbe delle domande aperte.

Il problema più evidente è che il calcolo per il sistema considerato, sebbene alla portata di studenti di quinta superiore, non è semplicissimo, ed essi potrebbero perdersi nella trigonometria. In effetti, Feynman nel primo capitolo fornisce solo la spiegazione concettuale; la soluzione matematica (comunque ottenuta sostituendo dei numeri come esempio, e non ricavando le formule generali) viene trovata nel secondo capitolo, dopo aver proposto esempi più semplici.

Il secondo problema, più fondamentale, è che la spiegazione si basa sulle regole dell'ottica geometrica. Qui il punto non è tanto se gli studenti ricordino l'otica geometrica (forse no, ma dovrebbero) ma il fatto che l'esempio trattato potrebbe lasciare l'impressione che le regole della fisica quantistica si fondino su quelle dell'ottica gometrica, che sarebbero in un certo senso più fondamentali. La realtà è esattamente il contrario.

Commenti:

Ci si potrebbe chiedere infatti perchè Feynman consideri solo i due possibili raggi dell'ottica geometrica tra sorgente e rivelatore, e non tutti gli altri cammini, rettilinei a tratti, che vengono riflessi, tra sorgente e rivelatore, solo agli ostacoli che il fotone incontra, ossia una cosa di questo genere.



La risposta è che Feynman sa benissimo che tali ulteriori cammini sarebbero inutili, in quanto è possibile dimostrare un teorema che ha più o meno il seguente contenuto: "quando l'ottica geometrica prevede, di per sè, due o più possibili raggi per arrivare da S ad R, allora il risultato finale è approssimativamente lo stesso se, anzichè considerare tutti i cammini possibili, si considerano come cammini solo i diversi raggi previsti dall'ottica geometrica. Naturalmente questo teorema non è affatto evidente per i lettori.

Commenti:

C'è anche un terzo problema didattico nell'esempio di Feynman: in esso le freccine non sono di lunghezza unitaria, perchè Feynman vuole calcolare probabilità assolute di riflessione e trasmissione (cioè spiegare la curva sperimentale) e non solo trovarne i massimi e i minimi. Tuttavia, la spiegazione di come vengono ottenute le lunghezze è abbastanza breve ed empirica; la questione merita certamente più spazio e infatti viene approfondita nel capitolo 2.

Let's take the length first. As we saw in the first experiment (where we put the photomultiplier inside the glass), the front surface reflects about 4% of the photons that come down. That means the "front reflection" arrow has a length of 0.2. The back surface of the glass also reflects 4%, so the "back reflection" arrow's length is also 0.2.

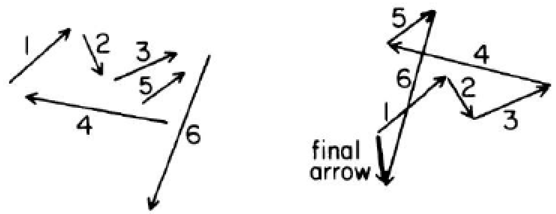


FIGURE 9. *Any number of arrows can be added in the manner described in Figure 8.*

Quali fenomeni posso spiegare?

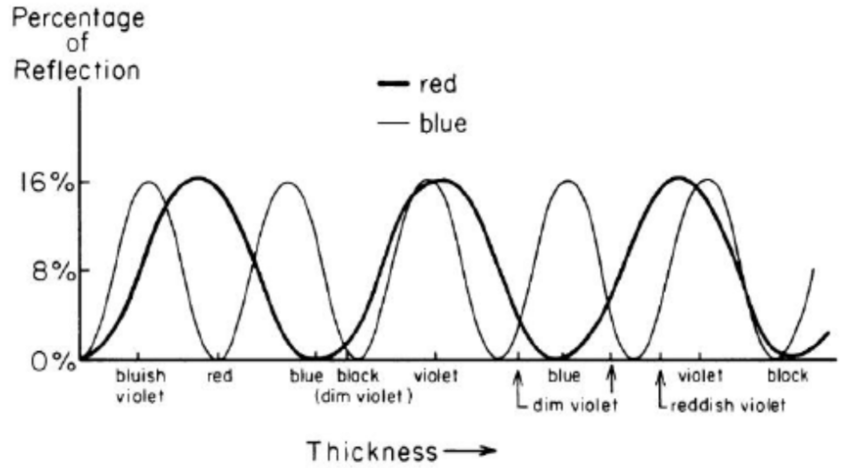


FIGURE 18. *As the thickness of a layer increases, the two surfaces produce a partial reflection of monochromatic light whose probability fluctuates in a cycle from 0% to 16%. Since the speed of the imaginary stopwatch hand is different for different colors of light, the cycle repeats itself at different rates. Thus when two colors such as pure red and pure blue are aimed at the layer, a given thickness will reflect only red, only blue, both red and blue in different proportions (which produce various hues of violet), or neither color (black). If the layer is of varying thicknesses, such as a drop of oil spreading out on a mud puddle, all of the combinations will occur. In sunlight, which consists of all colors, all sorts of combinations occur, which produce lots of colors.*

Formazione di pattern iridescenti con i diversi colori dello spettro in macchie d'olio, bolle di sapone...

Una digressione: l'importanza della luce nella clase quinta

In quinta Liceo Scientifico gli studenti incontrano la luce sotto almeno tre aspetti diversi: la luce come onda elettromagnetica per Maxwell, la luce sotto forma di fotoni nell'effetto fotoelettrico, nell'effetto Compton, nella legge del corpo nero, nel decadimento elettromagnetico dell'atomo; la luce nella relatività speciale. Si può dire che la luce costituisca il vero *fil rouge* del programma di quinta.

Ma quando arrivano in quinta, gli studenti cosa sanno della luce? Quali fenomeni conoscono? Quali modelli hanno in mente?

La questione dei tempi di percorrenza

Nel seguito del libro, Feynman si occupa di spiegare come il calcolo potrebbe essere svolto in modo ancora più accurato. Infatti, andrebbero considerati anche i cammini (tutti previsti dall'ottica geometrica) in cui il fotone viene riflesso all'interno del materiale un numero arbitrario di volte.

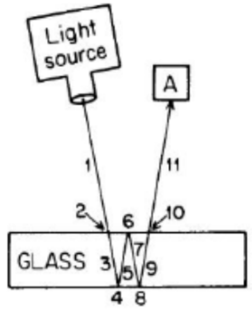
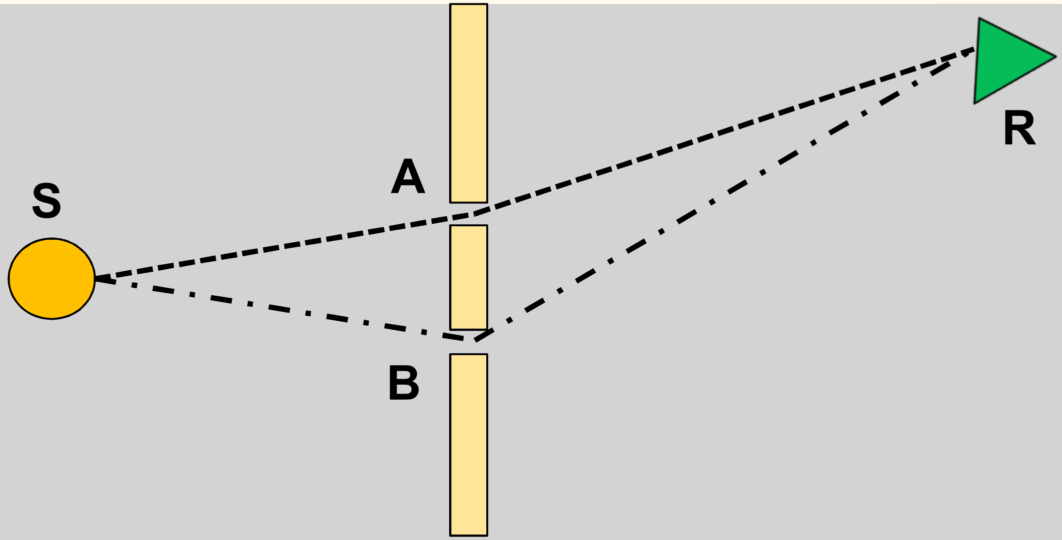


FIGURE 46. *Yet other ways the light could reflect should be considered for a more accurate calculation. In this figure, shrinks of 0.98 occur at steps 2 and 10; shrinks of 0.2 occur at steps 4, 6, and 8. The result is an arrow with a length of about 0.008, which is another alternative for reflection, and should therefore be added to the other arrows which represent reflection (0.2 for the front surface and 0.192 for the back surface).*

Questo rende più evidente un problema che è comunque presente in tutte le versioni del metodo della somma sui cammini, e quindi vale la pena sviscerarlo:
Come possono cammini che differiscono di un tempo di percorrenza arbitrariamente lungo interferire?

La questione dei tempi di percorrenza

Anche nel semplice caso delle de fenditure è evidente, se lo si analizza con attenzione, che i due cammini del fotone non richiedonosempre lo stesso tempo, ad eccezione che nel caso in cui il rivelatore sia esattamente a metà fra le due fenditure.



E' evidente che il cammino SBR è più lungo del cammino SAR. Allora, perchè diciamo che i due cammini possono interferire?

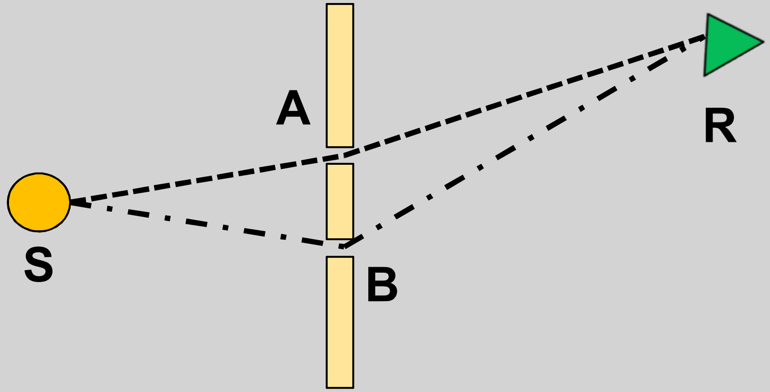
La questione dei tempi di percorrenza

Per dare una risposta dobbiamo esaminare più da vicino la regola che abbiamo enunciato nella scorsa lezione, riguardo alla differenza tra probabilità classica e quantistica.

Se un evento E può accadere in due modi A e B <u>tra loro indistinguibili</u>, la probabilità dell'evento è ottenuta sommando le ampiezze (fasori) degli eventi A e B, e elevando poi al quadrato. Cioè non P(E) = P(A) + P(B) ma

$$P(E) = \left|\vec{\psi}(A) + \vec{\psi}(B)\right|^2$$

Dove la lettera greca psi indica, tradizionalmente, le ampiezze. Si ha quindi **<u>interferenza</u>** tra le due alternative.



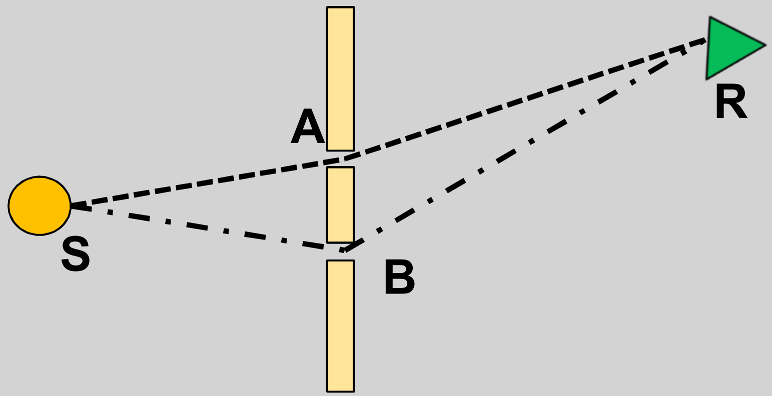
Ora l'evento R, ossia la rivelazione del fotone, è un evento macroscopico che posso pensare avvenga ad un tempo fissato, supponendo che la risposta del rivelatore sia nota. Concentriamoci su ciò che avviene in S, ossia l'emissione del fotone. E' vero che io posso conoscere il tempo in cui essa avviene con assoluta precisione?
La risposta è no; anzi, dall' assunzione iniziale che il fotone abbia energia fissata con assoluta precisione conseguirebbe, in base al principio di indeterminazione, che l'intervallo di tempo entro il quale il fotone viene emesso sia affetto da una indeterminazione infinita ($\Delta\tau \geq \hbar/2\Delta E$).

La questione dei tempi di percorrenza

In questo senso, il principio di indeterminazione energia-tempo è incorporato nel metodo della somma sui cammini: se considero l'energia precisamente fissata, allora devo ammettere un'indeterminazione infinita sull'istante di tempo a cui il fotone è stato emesso, e quindi devo considerare come indistinguibili anche cammini possibili che differiscono di un tempo di percorrenza arbitrariamente lungo.

Se al contrario, volessi considerare il caso in cui l'indeterminazione sull'intervallo di tempo entro cui il fotone è emesso è limitata, allora non potrei più assumere che l'energia sia precisamente fissata; dovrei quindi sommare solo quei cammini nei quali il fotone è emesso in un intervallo di tempo che sta entro la mia indeterminazione $\Delta\tau$, ma d'altra parte dovrei considerare anche i cammini nei quali λ e ω sono compatibili con la mia indeterminazione ΔE.

$$P(E)=|\psi(A)+\psi(B)|^2$$

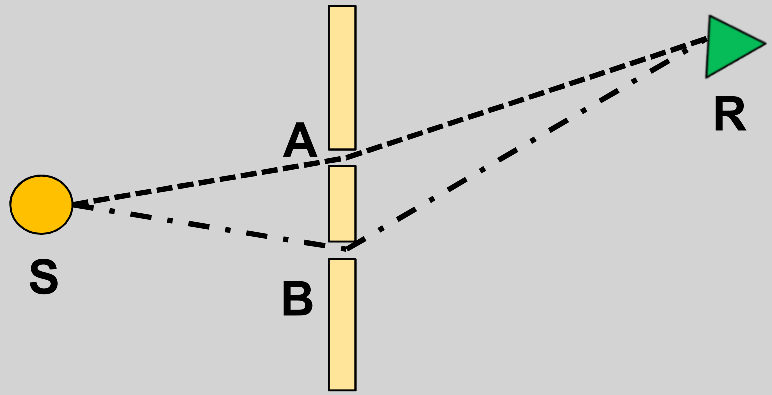


Questo è essenzialmente il metodo del *path integral*, identico dal punto di vista concettuale al "sum over paths" a energia fissata (si sommano i fasori associati a tutti i cammini indistinguibili da sorgente a rivelatore) ma che permette di trattare i casi in cui l'indeterminazione sull'energia, e conseguentemente quella sul tempo, sono infinite.

La questione dei tempi di percorrenza

A questo punto non rimane che chiedersi: l'assunzione di energia del fotone nota con precisione assoluta ha un senso? Io potrei semplicemente accendere la sorgente e spegnerla dopo un certo intervallo di tempo; come potrebbe allora la mia indeterminazione sul tempo di emissione del fotone essere infinita?

La domanda equivale in effetti a chiedersi se esiste davvero la luce monocromatica, la cui risposta è come è noto "a rigore no, ma in partica sì". Si può fare qualche calcolo approssimativo considerando l'incertezza tipica che si ha su fotoni, ad esempio emessi nel visibile attraverso transizioni atomiche



Ad esempio, la vita media degli stati eccitati dell'idrogeno da cui si producono le linee visibili di Balmer è circa $10^{-7} - 10^{-8}$ s. Questo significa che l'incertezza assoluta sull'energia di un fotone è dell'ordine di $\hbar/2\Delta\tau \approx 10^{-26}\,J$ e quella relativa di circa 10^{-7}. Poichè in un tempo $\Delta\tau$ la luce è in grado di percorrere dai 3 ai 30 metri, questo è l'ordine di grandezza delle differenze tra le lunghezze dei cammini del fotone che possiamo considerare indistinguibili prima che il nostro metodo, applicato ad un fotone singolo, arrivi ai suoi limiti. Se poi la sorgente, invece che fotoni singoli, emette continuamente luce monocromatica, il metodo funziona ancora meglio: in questo caso va infatti considerato il fatto che i diversi fotoni emessi sono *indistinguibili tra loro*.

Il percorso più semplice

Avendo discusso com'è il "percorso" (volto alla divulgazione) progettato da Feynman, torniamo al nostro percorso base, il più semplice possibile, che non richiede nemmeno di introdurre una regola aggiuntiva per la riflessione. Cosa abbiamo visto finora?

- La parte iniziale del percorso, volta a costruire un modello mentale adeguato del fotone: l'effetto fotoelettrico, l'effetto compton, l'esperimento di Grangier ✓
- Sistemi di fenditure (singola, doppia, tripla, reticoli) ✓
- Estensione agli oggetti quantistici massivi (lunghezza d'onda di De Broglie) ed esperimenti analoghi (es. diffrazione di elettroni...)
- Giustificare il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto tramite la diffrazione da singola fenditura con larghezza variabile.
- Enunciare il principio di indeterminazione energia-tempo e discutere come esso sia incorporato nel modello utilizzato. ✓
- Giustificare il modello semiclassico dell'atomo di Bohr
- Il principio di corrispondenza (limite di piccole lunghezze d'onda)

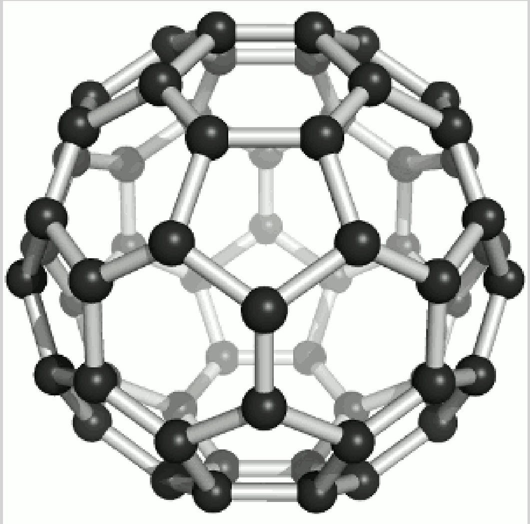
Le particelle massive

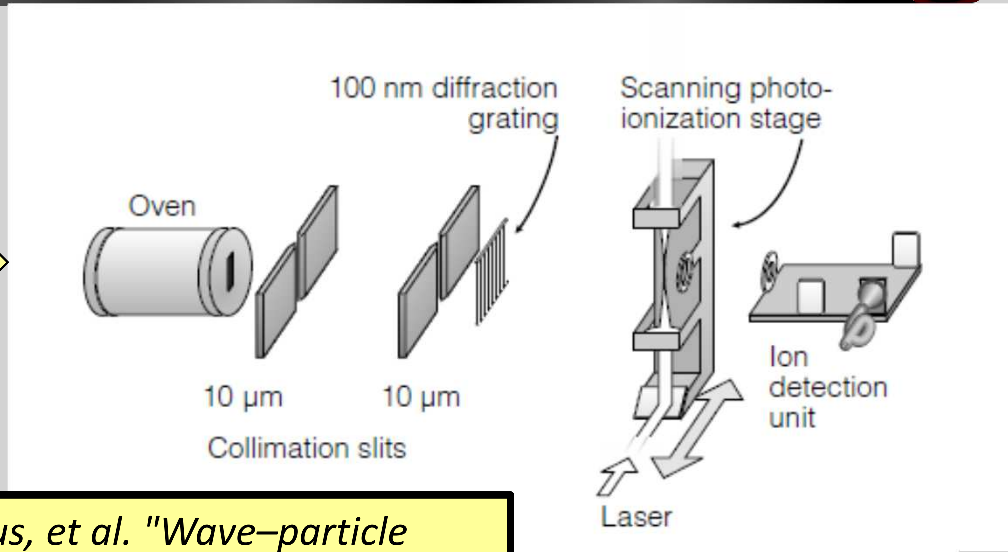
Che gli elettroni (e tutte le particelle massive) abbiano un comportamento analogo ai fotoni è previsto fin dall’inizio dalla fisica quantistica. Il primo esperimento di tipo «doppia fenditura» con un elettrone alla volta è stati eseguito nel 1976 da un gruppo di ricercatori italiani (Merli, Missiroli e Pozzi). Questo esperimento è stato votato come **l'esperimento più bello della fisica**, secondo un sondaggio promosso dalla rivista Physics World nel 2002.

In anni recenti l’esperimento è stato ripetuto più volte a scopo educativo e divulgativo, registrando in filmati l’accumulo progressivo degli elettroni sullo schermo e la formazione delle frange di interferenza .

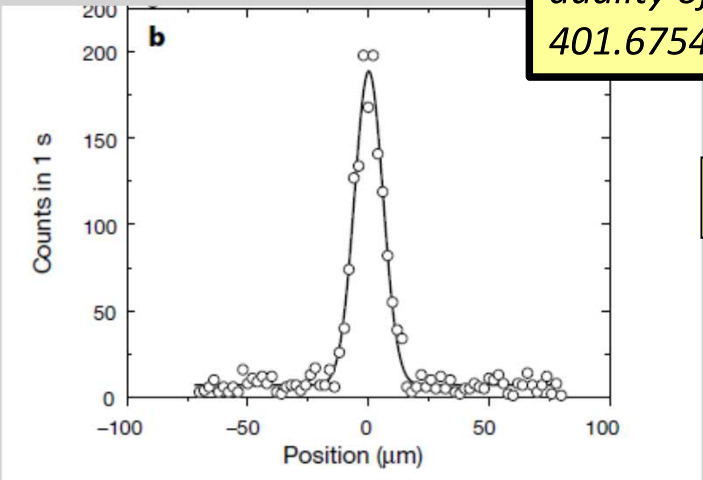
Piano Lauree Scientifiche
In collaborazione con MIUR, con.Scienze, Confindustria

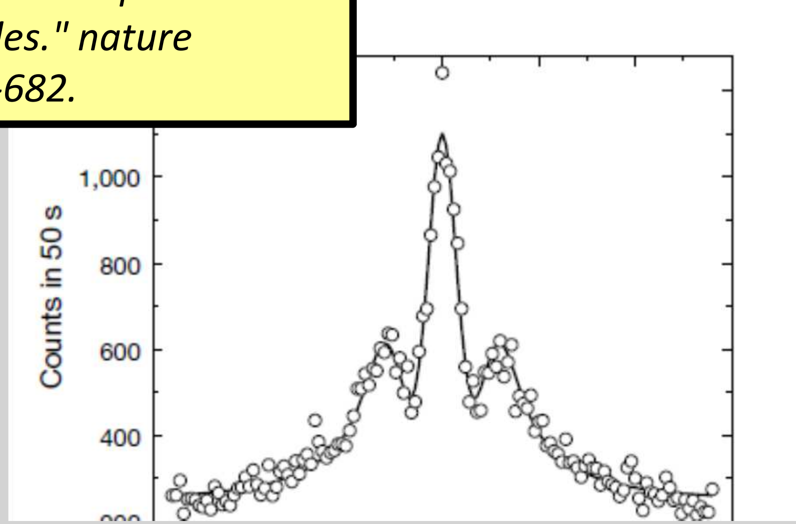
Diffrazione di molecole C60





Arndt, Markus, et al. "Wave–particle duality of C60 molecules." nature 401.6754 (1999): 680-682.





Le particelle massive

Come possiamo interpretare tutto ciò? Ripartiamo dalla formula per la fase del vettore associato al fotone: $\varphi = kx - \omega t$.

Possiamo scrivere questa formula utilizzando grandezze che abbiano lo stesso significato per fotoni e particelle massive?

Abbiamo imparato dall'effetto fotoelettrico che $\omega = 2\pi f = 2\pi \; E/h$, mentre dall'effetto Compton abbiamo capito che $k = 2\pi/\lambda = 2\pi \; p/h$. Possiamo allora scrivere la fase del vettore associato ad una particella massiva come

$$\varphi = \frac{2\pi}{h}\left(p \cdot x - E \cdot t\right)$$

Associamo quindi anche all'oggetto quantistico dotato di massa una lunghezza caratteristica, che è legata alla sua periodicità intrinseca: la lunghezza del tratto di cammino nel quale il vettore associato compie un giro completo.

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

Questa lunghezza è detta ***lunghezza d'onda di De Broglie****.*

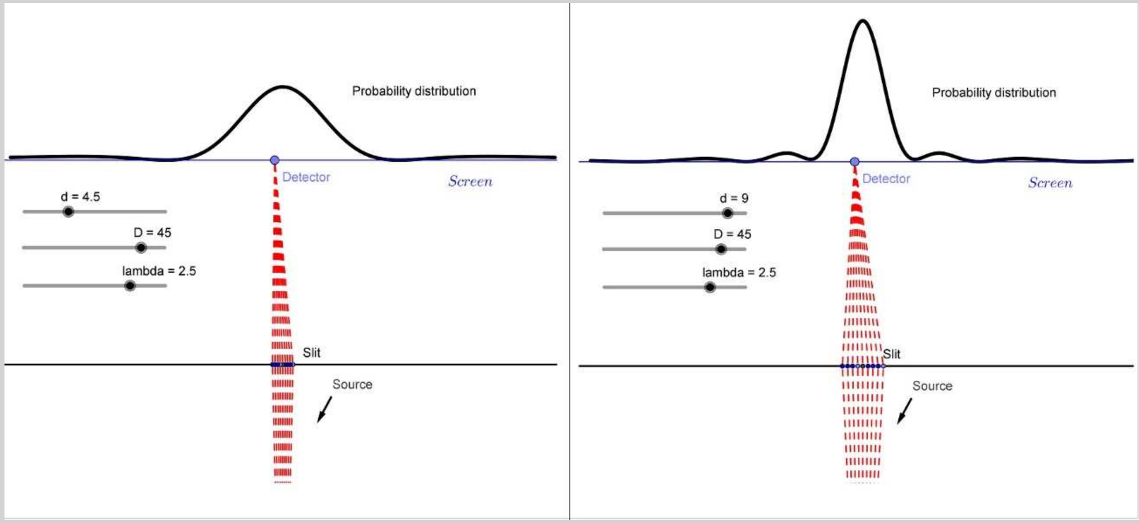
Un modello generale

La possibilità di fornire un modello unitario del comportamento di fotoni e particelle massive è un vantaggio rilevante dell'approccio di Feynman, di cui abbiamo esperienza diretta dopo la sperimentazione in classe. Una cosa che possiamo affermare con ragionevole certezza è che gli studenti non costruivano modelli mentali radicalmente diversi per l'elettrone e il fotone, come riportato nella letteratura, ma una rappresentazione unitaria di entrambi come diversi esempi di oggetti quantistici.

Una delle conseguenze è che le cose che eravamo abituati a considerare come onde, si comportano anche come particelle; e le particelle si comportano come onde; **in effetti, tutto si comporta nello stesso modo**. Quindi la meccanica quantistica unifica l'idea del campo con le sue onde, e quella di particella, in un unico concetto.

R. P. Feynman, "Sei pezzi facili", 1994

Il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto



https://www.geogebra.org/m/VljzT1uw

Consideriamo la diffrazione da singola fenditura con fotoni singoli, a energia fissata. Utilizzando la simulazione possiamo osservare, qualitativamente, che la figura di diffrazione si allarga al restringersi della fenditura, e viceversa.

Ma la larghezza della fenditura può essere vista come incertezza Δx sulla posizione del fotone nel momento in cui attraversa la fenditura (infatti, tutto quello che sappiamo di esso è che non può essere intercettato dallo schermo). Al contrario, la larghezza della figura di diffrazione può essere collegata all'incertezza Δp_x sulla componente x della quantità di moto del fotone, sempre nel momento in cui atraversa la fenditura.

Il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto

Per essere un po' più precisi, l'incertezza sulla posizione del fotone è $\Delta x \approx d/2$ *. Possiamo stimare la parte dello schermo su cui il fotone cade con maggior probabilità con la parte compresa tra I primi due minimi, cioè tra i punti* $y = \pm \lambda D/d$ *. Perciò possiamo stimare l'incertezza sull'angolo con cui il fotone è partito come* $\Delta\theta = \lambda/d$ *e quindi* $\Delta p_x \approx p\Delta\theta = h/d$ *da cui*

$$\Delta x \Delta p_x \approx \frac{d}{2}\frac{h}{d} = \frac{h}{2}$$

L'argomentazione qui esposta produce un risultato approssimato; in fisica quantistica è tuttavia possibile derivare rigorosamente (teorema di Robertson) la relazione esatta

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi}$$

Il principio di indeterminazione posizione-quantità di moto

Nella prospettiva moderna (da discutere eventualmente alla luce del dibattito storico) il principio di indeterminazione non riguarda un disturbo causato al sistema col processo di misura, sebbene vi sia stato su questo un lungo dibattito storico che, in parte, prenderemo in considerazione. Riguarda invece una proprietà intrinseca dei sistemi quantistici, ossia l'impossibilità che essi si trovino in uno stato in cui i valori di grandezze tra loro incompatibili siano entrambe precisamente definite, oltre un certo limite intrinseco.

Per quanto riguarda la forma di indeterminazione più comune, quella tra la posizione di un oggetto quantistico lungo una certa direzione, e la sua quantità di moto lungo la stessa direzione, tale indeterminazione ha come ordine di grandezza la costante di Planck h, costante fondamentale della natura.

Stima dell'energia minima tramite il principio di indeterminzione

Se un oggetto quantistico unidimensionale è confinato in una regione di lunghezza L, l'indeterminazione minima sulla sua quantità di moto è

$$\Delta p \geq \frac{h}{4\pi\Delta x} = \frac{h}{2L\pi}$$

E poichè vale

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2\mathrm{m}}$$

E per la definizione di varianza di una variabile casuale

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 + (\Delta p)^2$$

Ma $\langle p \rangle = 0$ *e quindi*

$$\langle E \rangle = \frac{\langle \Delta p \rangle^2}{2\mathrm{m}} \geq \frac{h^2}{8\pi^2 m L^2}$$

L'energia media dell'oggetto quantistico non può essere zero. Questa è anche una stima (per difetto) dell'energia dello stato fondamentale per un oggetto quantistico confinato in una buca di potenziale infinita.

Piano Lauree Scientifiche
In collaborazione con MIUR, con.Scienze, Confindustria

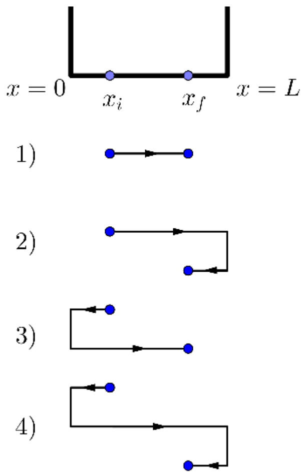
Il principio di indeterminazione energia-tempo

Molti libri riportano la formula per l'indeterminazione tempo-energia, ma non spiegano in modo chiaro cosa si intenda per "indeterminazione sul tempo". Indeterminazione sul tempo di cosa? Ne nascono anche esercizi con formulazioni abbastanza strampalate, come vedremo nel corso sugli esercizi e problemi.

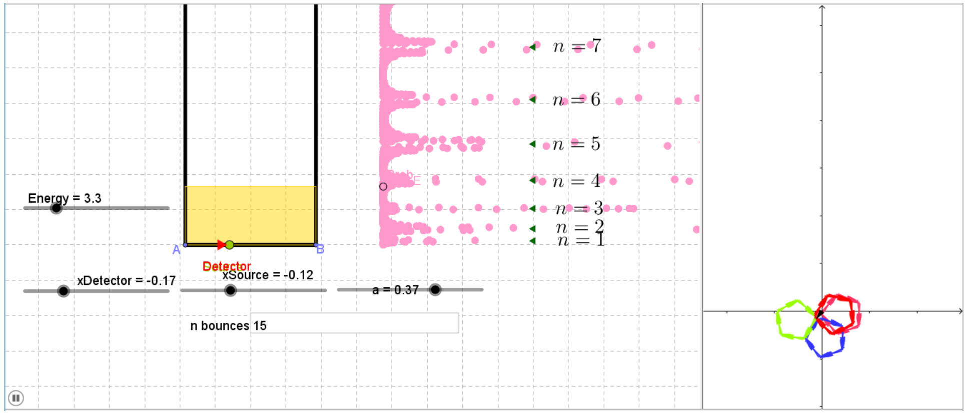
Per un oggetto quantistico, l'indeterminazione *ΔE* sull'energia, e l'intervallo di tempo *Δt* oltre il quale le sue proprietà non possono più essere considerate stazionarie obbediscono alla relazione $\Delta E \Delta t \geq h/4\pi$. Questa è considerata la formulazione più adeguata dell'indeterminazione tempo-energia. Il ragionamento di base che permette di collegare la scala di tempo Δt ad una indeterminazione è il seguente: se l'energia *E* dell'oggetto quantistico è fissata, esso si trova in uno stato stazionario, e quindi non può decadere. Ma se vi è un'indeterminazione ΔE sull'energia dell'oggetto quantistico, allora lo stato non può più essere considerato stazionario trascorso un tempo $\Delta t \geq h/4\pi\Delta E$. Pertanto, è dopo tale intervallo di tempo che esso, generalmente, decade. Δt può allora essere interpretato nel senso di *vita media* di uno stato eccitato, e anche di indeterminazione sull'intervallo di tempo entro cui un oggetto quantistico, prodotto attraverso processi radioattivi o radiativi, viene effettivamente emesso. E' in questo senso specifico che, anche per quanto riguarda il tempo, la relazione può essere considerata di "indeterminazione"

I sistemi legati

Anche in un percorso "minimo" si potrebbe valutare di proporre l'esempio dell'oggetto qantistico in una buca di potenziale infinita, anche solo a livello di simulazione, per spiegarne gli aspetti concettuali. Se si effettua il calcolo, il risultato non viene esatto (l'indice del livello viene *n* anzichè *n+1*) se si ignora il fattore dovuto alla riflessione, ma *n=0* può essere escluso per altri motivi



$$E = \frac{h^2 (n+1)^2}{8mL^2}$$



https://www.geogebra.org/m/flp6tEZQ

Per la particella in una buca, i livelli di energia permessi corrispondono ai valori per cui i fasori corrispondenti alle diverse possibili "famiglie" di cammini sono in fase

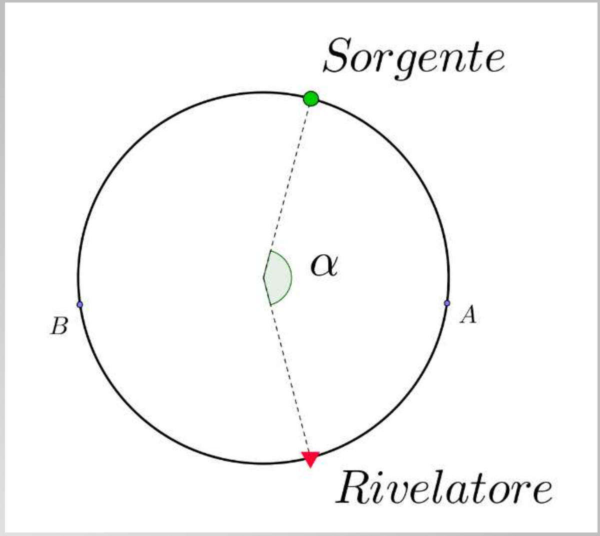
Elettrone vincolato a una circonferenza

Un elettrone di massa m è VINCOLATO a muoversi lungo una circonferenza di raggio R. L'elettrone ha energia (cinetica) E ed è emesso da una sorgente S.

Un rivelatore è posto in P ad una distanza αR lungo la direzione di moto dell'elettrone.

I punti A e B sono inseriti nella figura solo per aiutarci a rappresentare i cammini possibili.

Lungo il cammino non ci sono riflessioni.



Non essendovi riflessioni, i casi in cui il percorso sia in senso orario o antiorario sono distinguibili, quindi vanno considerati separatamente (il rivelatore potrebbe facilmente distinguere i due casi)

Cammino	Lunghezza	Fase φ acquisita
SAR	αR	$kR\alpha$
SABAR	$\alpha R+2\pi R$	$kR(\alpha+2\pi)$
SABABAR	$\alpha R+4\pi R$	$kR(\alpha+4\pi)$
…	…	…

Condizione perché si sommino costruttivamente le ampiezze di due cammini consecutivi:

$$2\pi kR = 2n\pi \longrightarrow kR = n \longrightarrow \boxed{L = pR = \frac{nh}{2\pi}}$$

Quantizzazione del momento angolare

$$\boxed{K_n = \frac{p^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{(2\pi)^2\, 2mR^2}}$$

$$n = 1, 2, 3\ldots$$

Quantizzazione dell'energia cinetica dell'elettrone

In questo caso l'ampiezza è un vettore che ruota lungo la circonferenza, ma ha modulo costante, quindi la probabilità di rivelare l'elettrone è costante lungo tutta la circonferenza (ma può essere nulla o non nulla a seconda dell'energia cinetica dell'elettrone).

L'atomo di Bohr

Consideriamo (assunzione che è ASSOLUTAMENTE FALSA, ma che facciamo come prima approssimazione) che nell'atomo di idrogeno l'elettrone debba essere **vincolato a percorre un'orbita classica**, e introduciamo come unico elemento quantistico il fatto che, in questa orbita classica, l'elettrone possa interferire con se stesso, percorrendo tutti i possibili cammini all'interno dell'orbita (come l'elettrone confinato su una circonferenza nell'esempio precedente).

L'orbita classica per l'atomo di idrogeno è definita dalle condizioni:

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{mv^2}{R} = \dfrac{ke^2}{R^2} \\[2ex] E = \dfrac{1}{2}mv^2 - \dfrac{ke^2}{R} \end{cases}}$$

Uguaglianza di forza centripeta e di Coulomb

Energia totale dell'elettrone = costante

$$K = \frac{ke^2}{2R} \qquad E = -\frac{ke^2}{2R}$$

Negativa perché l'elettrone è legato

Riprendiamo la legge di quantizzazione dell'energia **cinetica** trovata per l'elettrone vincolato su una circonferenza :

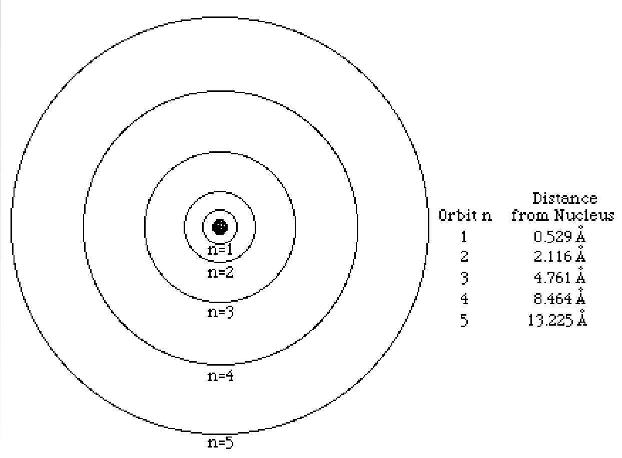
$$\boxed{K_n = \frac{n^2 h^2}{(2\pi)^2\, 2mR^2}} \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Uguagliando al valore trovato per l'energia cinetica su un'orbita classica abbiamo:

$$\boxed{\frac{n^2 h^2}{(2\pi)^2\, 2mR^2} = \frac{ke^2}{2R}}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{\frac{n^2 h^2}{(2\pi)^2\, mke^2} = R_n}$$



La combinazione della condizione di quantizzazione dell'energia cinetica, e del valore di essa per un elettrone in un'orbita classica conduce alla condizione per cui solo un insieme discreto di valori del raggio dell'orbita sono permessi.

Per n=1 si ha il ***raggio di Bohr***, raggio (medio) dell'orbita dell'elettrone nello stato fondamentale dell'atomo di idrogeno

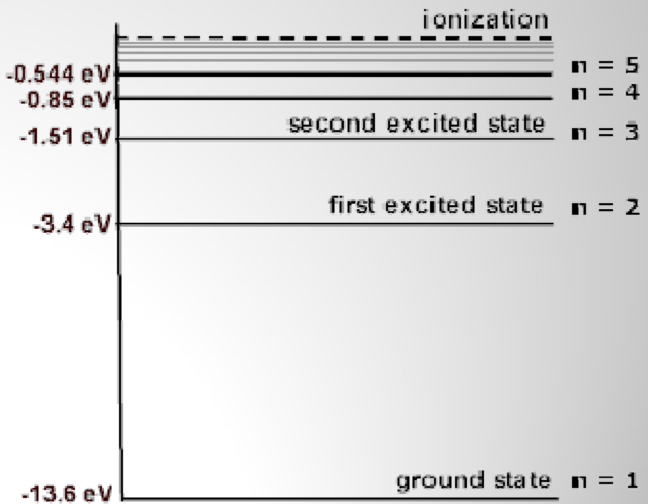
$$\boxed{R_1 = \frac{h^2}{(2\pi)^2 mke^2} = 5,29 \cdot 10^{-11} m}$$

Sostituendo i valori di R_n nella formula per l'energia totale (classica) si trovano le **energie permesse per l'elettrone (livelli energetici di Bohr)**

$$\boxed{E_n = -\frac{ke^2}{2R_n} = -\frac{2mk^2e^4\pi^2}{n^2h^2}} \qquad n = 1, 2, 3\ldots$$

Dunque l'elettrone può occupare solo stati caratterizzati un insieme discreto di valori dell'energia (totale).

Come avvengono le transizioni dell'elettrone tra uno stato e l'altro?



Ritorna in gioco il fotone

L'elettrone può passare da uno stato eccitato (a energia più elevata) ad uno ad energia minore **emettendo un fotone** di energia pari alla differenza tra i due livelli.

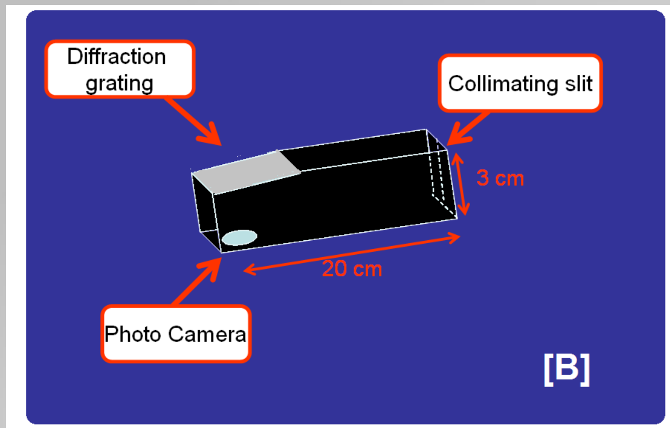
Viceversa, se l'atomo di idrogeno è stimolato dall'interazione con un campo elettromagnetico esso può passare ad uno stato eccitato **assorbendo un fotone** dell'energia necessaria a compiere il «salto» fra i due livelli.

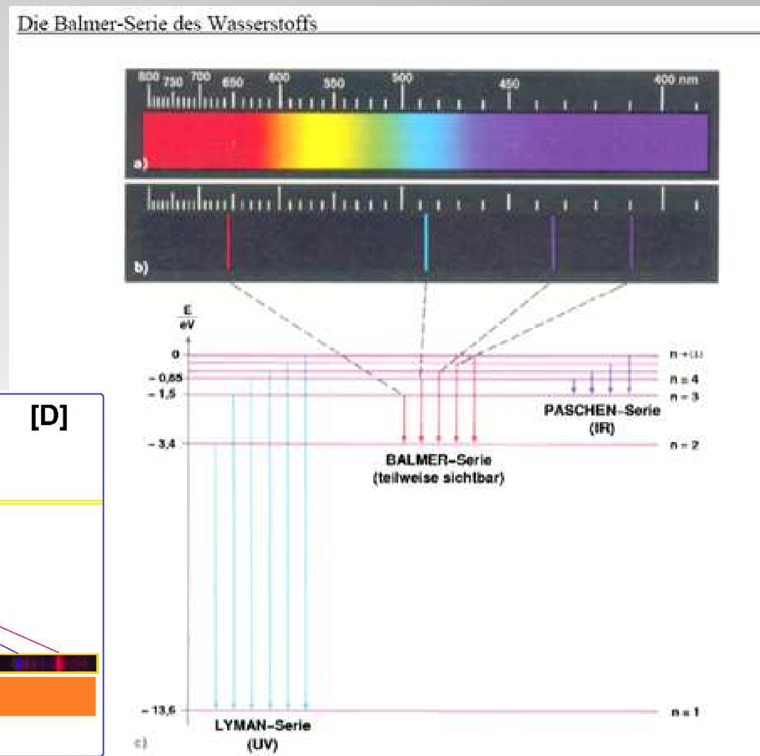
Concentriamoci sull'emissione di un fotone: se l'atomo si trova in un livello eccitato con indice n_i e «decade» in un livello con energia minore, ed indice $n_f < n_i$, l'energia del fotone emesso sarà

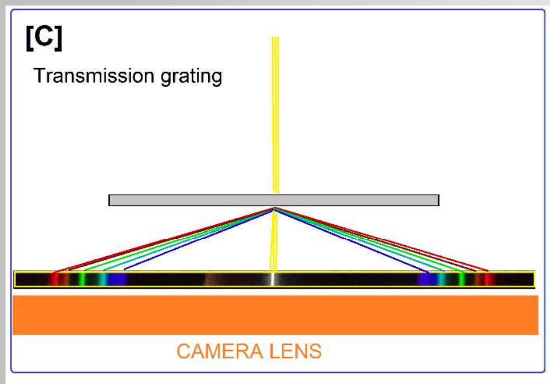
$$\boxed{E_\gamma = h \cdot f = E_{n_i} - E_{n_f} = \frac{2mk^2e^4\pi^2}{h^2}\left(\frac{1}{n_f^2} - \frac{1}{n_i^2}\right)} \qquad n_i > n_f$$

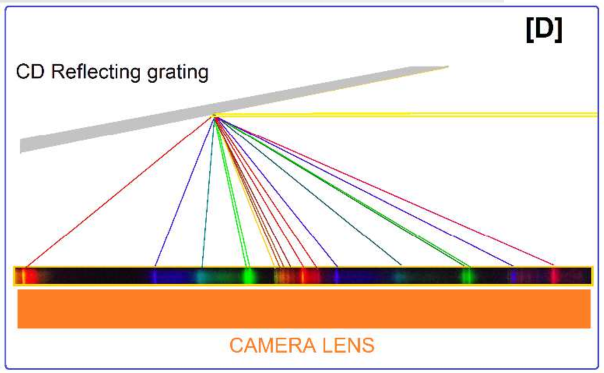
Avrò quindi uno spettro di emissione discreto, ossia l'atomo potrà emettere fotoni solo in corrispondenza di alcuni valori particolari (se $n_f = 1$ ho **la serie di Lyman**, se $n_f = 2$ ho la **serie di Balmer**).

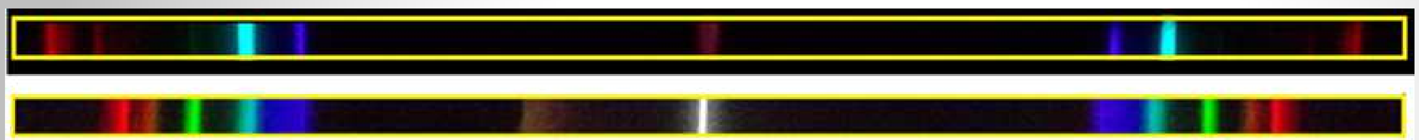
E' relativamente semplice osservare gli spettri atomici (almeno le parti di essi le cui frequenze sono nel visibile) mediante uno spettrofotometro anche rudimentale (reticolo di trasmissione – tubo protettivo – fotocamera) indirizzandolo sulla luce emessa da lampade a scarica di gas.









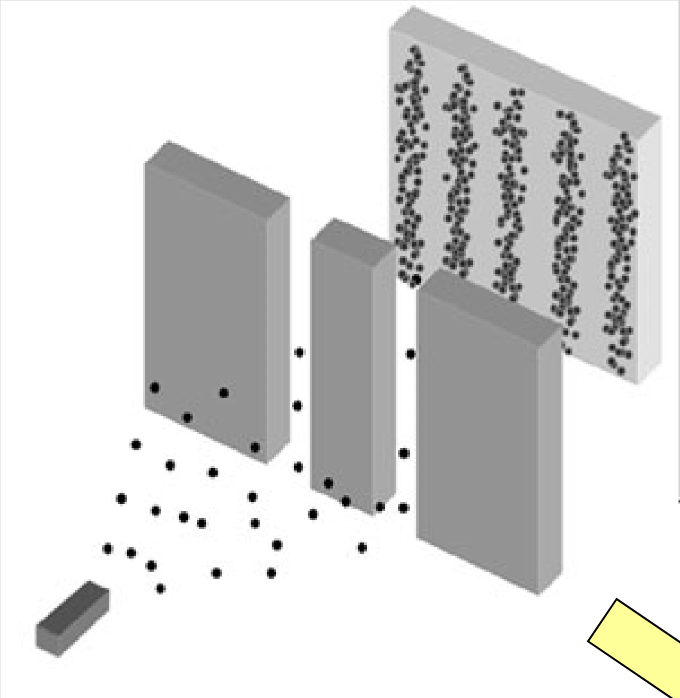


Idrogeno

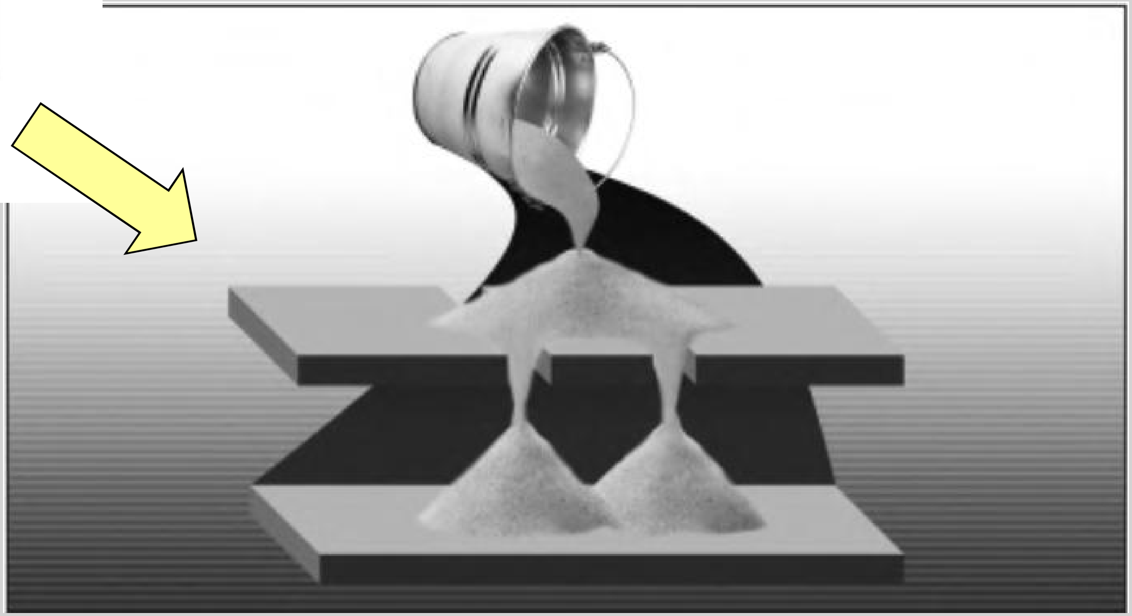
Mercurio

Nessuno obbliga a trattare le basi della fisica quantistica più di quanto necessario. In effetti, arrivati alla quantizzazione dell'energia per i sistemi legati, e agli spettri atomici, c'è tantissimo che si può fare senza proseguire con l'approfondimento della teoria quantistica, anche dal punto di vista sperimentale: ad esempio la differenza tra gli spettri di emissione e assorbimento delle sostanze, sistemi a semiconduttore, esperimenti con i LED... La scelta di un percorso che tratti la teoria in modo minimale potrebbe essere giustificata non solo dalla mancanza di tempo, ma invece dalla volontà di trattare in modo più ampio aspetti applicativi che richiedono un supporto limitato della teoria.

Limite classico



Al crescere della massa e/o dell’energia della particella, la lunghezza d’onda di de Broglie della particella diminuisce e il comportamento tende a diventare sempre più simile a quello classico.



https://tube.geogebra.org/student/mRH0juaWD

La spirale di Cornu

Nella spiegazione del principio di corrispondenza dal punto di vista della somma sui cammini ha grande importanza la "spirale di Cornu", tipica figura che forma la somma dei vettori associati ai cammini in molti casidi interesse. Da essa si puà osservare come i cammini che diano il maggior contributo alla probabilità risultante siano quelli la cui lunghezza sta entro una lunghezza d'onda dal cammino classico (traiettoria). Da qui si può capire in che modo il modello preveda che, al diminuire della lunghezza d'onda, il comportamento del sistema quantistico si avvicini a quello dell'oggetto classico.

Esempi: oggetto quantistico libero

https://www.geogebra.org/m/qTK7gICC

Rifrazione

https://www.geogebra.org/m/U4oiugBy

Rifrlessione

https://www.geogebra.org/m/UMbXFWOV

Limite classico

All'aumentare della massa della particella si osserva la figura di interferenza sullo schermo trasformarsi in quella che è l'aspettativa classica per la distribuzione della probabilità di rivelazione di particelle lanciate verso due fenditure: due distribuzioni di probabilità ben separate sullo schermo, approssimativamente gaussiane, in corrispondenza delle due aperture.

https://tube.geogebra.org/student/m971719

Il limite classico per le particelle massive è il corrispondente del limite dell'ottica geometrica per i fotoni. Nel caso della riflessione da uno specchio parabolico si considera una sorgente molto lontana dallo specchio (idealmente all'infinito) e una serie di rivelatori posti sull'asse dello specchio. Utilizzando il metodo della somma sui cammini si trova una probabilità di rivelazione che ha un massimo nel fuoco della parabola. Al diminuire della lunghezza d'onda del fotone incidente (rispetto alla distanza focale dello specchio, che è la scala di lunghezza rilevante del problema) vediamo tale distribuzione di probabilità divenire sempre più piccata intorno al fuoco.

https://tube.geogebra.org/student/m971769