

# Percorso di fisica quantistica con l'approccio dei cammini di Feynman

Gruppo di ricerca in Didattica della Fisica  
Università di Pavia, Dipartimento di Fisica  
Via Bassi 6, 27100 Pavia

## Indice generale

1. I fotoni ed il loro comportamento.....	2
1.1. L'effetto fotoelettrico.....	2
1.2. L'effetto Compton.....	4
1.3. Il problema della doppia fenditura.....	8
1.4. Indivisibilità del fotone.....	10
1.5. Legge probabilistica.....	11
2. Il modello di Feynman.....	14
2.1. Interferenza tra due fenditure con Feynman.....	15
2.1.1. Approssimazione di Fraunhofer.....	17
2.2. Diffrazione da fenditura singola con Feynman.....	18
2.3. Solo cammini rettilinei?.....	20
2.4. Effetti della riflessione.....	22
2.5. Interferometro Mach-Zehnder.....	23
3. Principio di indeterminazione.....	26
3.1. Incompatibilità.....	27
3.2. Interpretazione del principio di indeterminazione.....	27
3.3. Stato di un sistema quantistico*.....	28
3.4. Indeterminazione energia-tempo.....	29
4. Le particelle massive.....	30
5. L'effetto dell'informazione sui cammini.....	31
5.1. L'esperimento di Zhou, Wang e Mandel.....	32
5.2. Processi, non solo cammini.....	34
6. Quantizzazione.....	34
6.1. Elettrone in una "scatola".....	37
6.2. L'energia nulla non è ammessa.....	39
6.3. Quantizzazione del momento angolare.....	40
7. Atomo di Bohr.....	42
7.1. Limiti del modello di Bohr.....	44
8. Interferenza tra processi con più particelle*.....	44
8.1. Esperimento Hong, Ou, Mandel*.....	44
8.2. Ampiezza di una storia composta*.....	47
8.3. Bosoni, fermioni e regole di scambio*.....	48
8.4. Principio di esclusione di Pauli*.....	48
9. Il principio di corrispondenza (limite classico).....	48

# 1. I fotoni ed il loro comportamento

La storia delle risposte alla domanda "che cosa è la luce?" si presenta come un affascinante filo conduttore intrecciato con la storia della fisica nel suo complesso. Durante il curriculum della scuola superiore gli studenti incontrano tre diversi modelli di luce, a diversi livelli di complessità: la luce come un raggio (ottica geometrica), la luce come onda (ottica ondulatoria e teoria di Maxwell) e infine, la luce come composta di fotoni (in fisica quantistica introduttiva). Spesso non viene fatto alcun tentativo di connettere questi modelli, e fornire un quadro unificato e una risposta complessiva alla domanda sulla natura della luce.

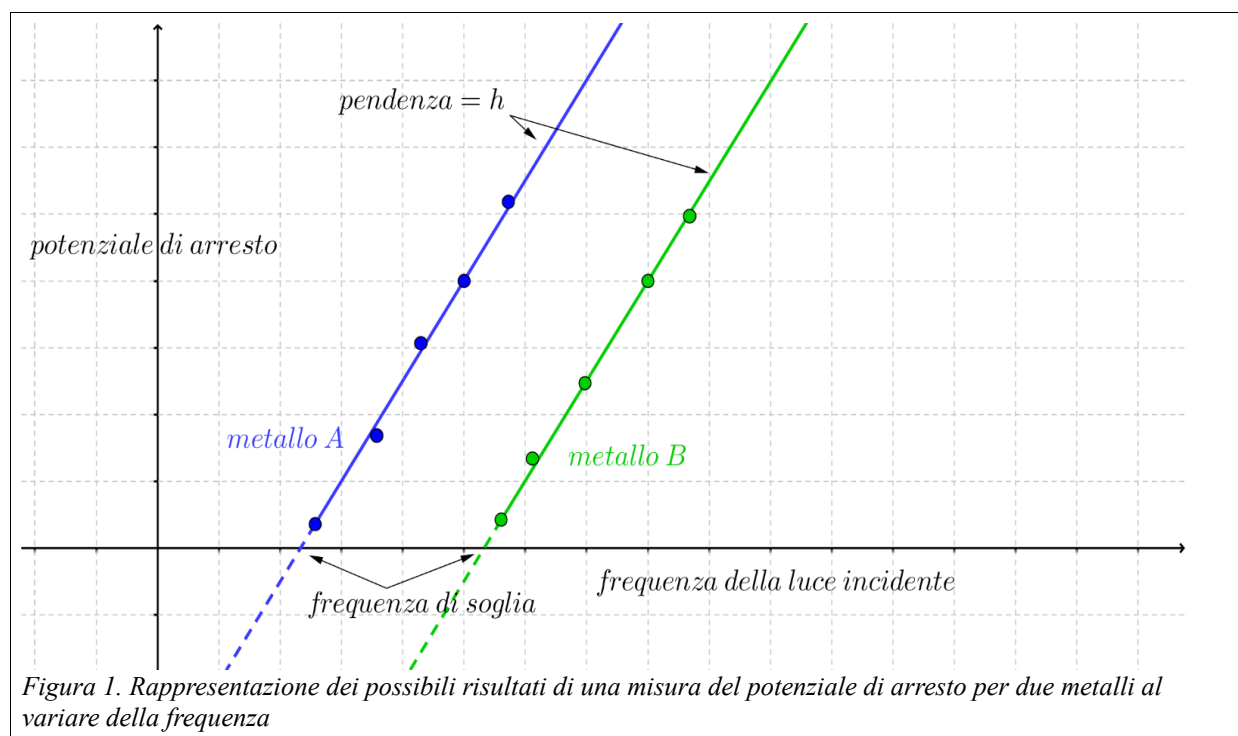
Storicamente, alla fine del XIX secolo il dibattito se la luce fosse un'onda o composta di particelle sembrava essersi concluso a vantaggio della descrizione ondulatoria fornita da Huygens nel '600. Gli studi di Young e Fresnel sui fenomeni di diffrazione e di interferenza della luce avevano confermato definitivamente la validità del modello ondulatorio, e le teorie sull'elettromagnetismo di Maxwell avevano correttamente predetto l'esistenza di onde elettromagnetiche dal comportamento identico a quello della luce, dimostrando così, di fatto, che la luce non è altro che un particolare intervallo di frequenze della radiazione elettromagnetica.

La fisica della fine dell'800 vedeva quindi un universo in cui il comportamento corpuscolare, caratteristico della materia, e quello ondulatorio, proprio della radiazione, erano alternativi e inconciliabili.

Nuove evidenze sperimentali costrinsero però i fisici a riaprire la questione e a supporre, ancora una volta, che la luce non fosse un'onda continua, bensì composta da elementi discreti, battezzati poi fotoni.

## 1.1. L'effetto fotoelettrico

Alcuni metalli, se esposti alla luce, emettono elettroni. Questo fenomeno viene chiamato *effetto fotoelettrico* ed il suo attento esame porta a forti contraddizioni con la teoria di Maxwell.



Svolgendo esperimenti a riguardo si osserva che:

- esiste una frequenza di soglia per la luce incidente, dipendente dal materiale, al di sotto della quale non si ha estrazione di elettroni. La teoria di Maxwell prevede che non possa esistere tale frequenza di soglia.
- L'energia massima degli elettroni emessi dipende in maniera lineare dalla frequenza della luce incidente, e non è modificata dall'intensità della luce. La costante di proporzionalità è la stessa per tutti i metalli. La teoria di Maxwell prevede una dipendenza di tale energia dall'intensità luminosa, non dalla frequenza.
- Il numero di elettroni emessi è direttamente proporzionale all'intensità luminosa.

La spiegazione dell'effetto fotoelettrico è dovuta ad Einstein che nel 1905, riprendendo l'ipotesi di Planck sulla *radiazione di corpo nero*, ipotizzò che la luce fosse composta di “quanti di luce”, ognuno con un'energia dipendente dalla frequenza secondo la relazione  $E = h\nu$ , dove  $h$  è chiamata costante di Planck. Inoltre la quantità di moto  $p$  del fotone doveva essere pari a  $p = E/c = h/\lambda$  in base a considerazioni derivanti dalla teoria della relatività speciale.

Le proprietà dell'effetto fotoelettrico sono ben spiegate dall'interpretazione di Einstein. È un ben noto risultato della chimica che gli elettroni sono legati agli atomi con un'energia di legame che dipende dal materiale. Un fotone che non possieda tale energia non è in grado di strappare l'elettrone dall'atomo, e l'energia posseduta da un fotone con frequenza pari a quella di soglia corrisponde proprio all'energia di prima ionizzazione dei metalli interessati.

La dipendenza lineare tra energia dell'elettrone e frequenza è una conseguenza diretta di  $E = h\nu$ , e nell'interpretazione di Einstein l'intensità luminosa è una misura di quanti fotoni il fascio luminoso contenga, spiegando così anche il terzo punto.

In molti esercizi dei libri di testo viene considerato un comune setup sperimentale per la verifica dell'effetto fotoelettrico: esso consiste di un circuito basato su un componente (solitamente un fotodiodo) che viene illuminato, producendo l'elettrone di fotoelettroni. In serie al fotodiodo si mette un generatore di tensione, che produce una differenza di potenziale tale da rallentare gli elettroni emessi dal fotodiodo. In questo caso occorre calcolare il cosiddetto “potenziale di arresto” (Figura 1) ossia il minimo potenziale prodotto dal generatore, capace di arrestare la corrente di fotoelettroni.

Quando il singolo fotone, di energia  $E = h\nu$  colpisce l'elettrone, gli fornisce energia sufficiente per essere estratto dal metallo (il “lavoro di estrazione  $W_0$ ”) più una certa energia cinetica  $K$ , che non può essere maggiore di (ed è solitamente uguale a) quanto previsto dalla conservazione dell'energia. Quindi:

$$h\nu = K_{MAX} + W_0 \quad (1)$$

Per annullare la corrente tra catodo ed anodo occorre perciò fare su ciascun elettrone un lavoro  $L = eV_A = K_{MAX}$  dove  $e$  è la carica dell'elettrone (in valore assoluto) e  $V_A$  è il potenziale d'arresto fornito dal generatore. Dunque possiamo riscrivere l'equazione (1) come:

$$V_A = \frac{h}{e}\nu - \frac{W_0}{e} \quad (2)$$

Questo è proprio l'andamento della tensione di arresto mostrato, per due materiali diversi, in Figura 1: la dipendenza tra la tensione di arresto e la frequenza della luce incidente è lineare; la pendenza della retta non dipende dal materiale (è il rapporto tra la costante di Planck e la carica dell'elettrone) mentre l'intercetta della retta varia a seconda del materiale (in quanto dipende dal potenziale di estrazione).

**Effetto fotoelettrico:** l'effetto fotoelettrico può essere spiegato assumendo che la luce sia composta da fotoni, la cui energia è legata alla frequenza tramite la relazione  $E = h\nu$ .

## 1.2. L'effetto Compton

Un'altra evidenza sperimentale in favore dell'esistenza del fotone è dovuta alla diffusione luminosa scoperta da Compton nel 1922, ora chiamata *diffusione Compton* od *effetto Compton*.

Quando la luce viene trasmessa attraverso un mezzo materiale essa viene diffusa, cioè in parte cambia direzione. La teoria di Maxwell prevede che la luce diffusa abbia la stessa frequenza della luce incidente, ma Compton scoprì che trasmettendo raggi X attraverso una piastra di grafite la luce diffusa presentava invece due picchi distinti, uno con la stessa lunghezza d'onda, l'altro con una lunghezza d'onda maggiore, la cui posizione dipendeva dall'angolo di deviazione. Si veda la Figura 2 presa dall'articolo originale di Compton,

In particolare, la lunghezza d'onda alla quale appariva il secondo picco variava secondo l'angolo  $\phi$  di deviazione della luce secondo una precisa legge sperimentale:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{mc}(1 - \cos\phi) \quad (3)$$

Dove  $m$  è la massa dell'elettrone. La teoria di Maxwell non è in grado di spiegare la variazione di lunghezza d'onda di parte della luce diffusa dimostrata dall'effetto Compton; Compton riprese l'ipotesi di Planck ed Einstein sulla struttura della luce, e ricavò la formula sperimentale assumendo che la diffusione della luce osservata fosse dovuta all'urto elastico tra il fotone e l'elettrone di un atomo, considerando l'effetto come l'impatto tra due particelle. Compton usò la teoria della relatività speciale per questa dimostrazione, per esprimere energia e quantità di moto del fotone e dell'elettrone, il quale può guadagnare abbastanza energia da raggiungere velocità relativistiche.

L'idea fondamentale è la seguente: se si adotta il modello del fotone, e se si assume che ad esso sia associata una quantità di moto che dipende, come l'energia, dalla sua frequenza (e quindi dalla sua lunghezza d'onda) allora sarà possibile spiegare perché, in seguito ad un urto con un elettrone, che porta ad una variazione della quantità di moto del fotone, debba variare anche sua la lunghezza d'onda. In particolare, il modulo della quantità di moto da associare al fotone deve essere (come previsto dalla relatività ristretta)  $p = E/c = h/\lambda$ .

Fatta questa assunzione, la trattazione dell'effetto Compton è essenzialmente quella di un urto elastico (relativistico) in due dimensioni. Per una derivazione della formula, si deve quindi impostare la conservazione della quantità di moto e dell'energia nell'urto tra il fotone e l'elettrone, assunto fermo prima dell'urto. Nella Figura 3  $\phi$  è l'angolo a cui viene deviato il fotone,  $\alpha$  è l'angolo (che non compare nella formula (3)) secondo cui l'elettrone viene deviato.

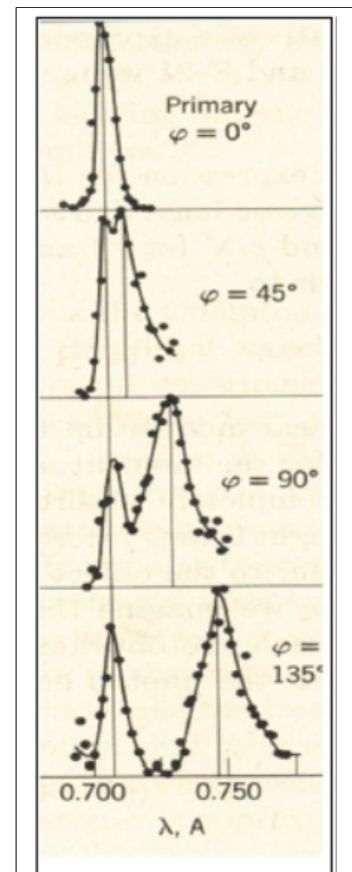
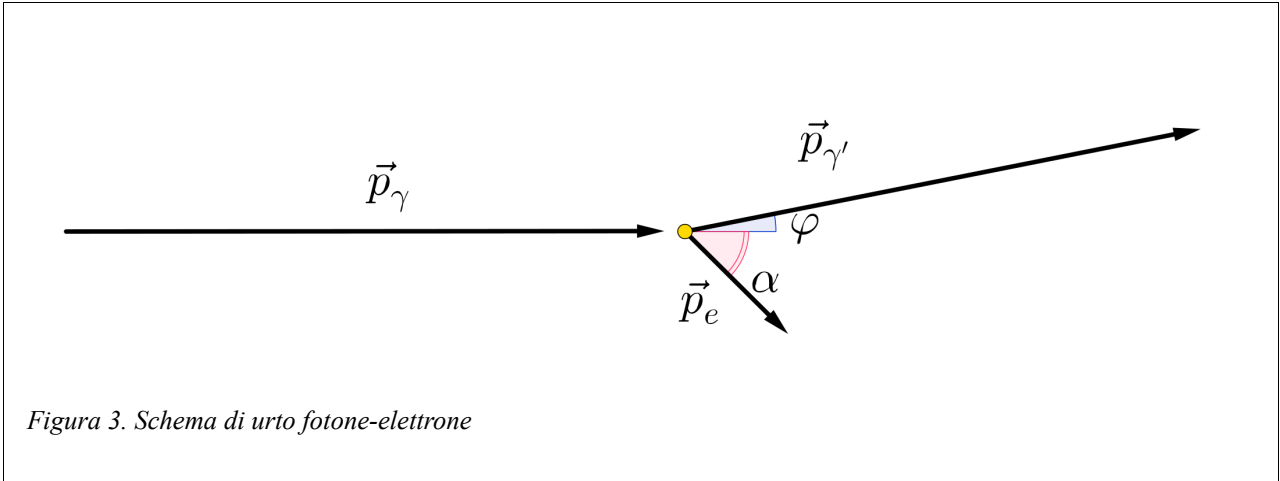


Figura 2. Dati dell'esperimento originale di Compton.

$$\begin{cases} E_\gamma = E_{\gamma'} + K_e \\ \vec{p}_\gamma = \vec{p}_{\gamma'} + \vec{p}_e \end{cases} \quad (4)$$

Dove  $K_e$  è l'energia cinetica dell'elettrone dopo l'urto. Possiamo fare il calcolo esatto, relativistico, dapprima nel caso particolare di un urto lineare, ossia in cui il fotone colpisca l'elettrone e rimbalzi indietro, esattamente lungo la direzione dalla quale era venuto. Queste condizioni corrispondono a porre in Figura 3  $\varphi = \pi$  e  $\alpha = 0$ . In questo caso, ricordando dalla relatività ristretta che  $K_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$  possiamo riscrivere le (4) come:



$$\begin{cases} hc/\lambda = hc/\lambda' + \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2 \\ h/\lambda = -h/\lambda' + p_e \end{cases} \quad (5)$$

Lasciando nella prima delle (5) al membro di destra solo la radice, ed elevando entrambi i membri di tale equazione al quadrato si ottiene:

$$\begin{cases} h^2 c^2 \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{(\lambda \lambda')^2} + 2 h m c^3 \frac{(\lambda' - \lambda)}{\lambda \lambda'} = p_e^2 c^2 \\ h \frac{(\lambda + \lambda')}{\lambda \lambda'} = p_e \end{cases} \quad (6)$$

Sostituendo nella prima delle (6)  $p_e$  ricavato dalla seconda si ottiene dopo alcuni calcoli

$$\lambda' - \lambda = 2 \frac{h}{m c} \quad (7)$$

Che corrisponde alla (3) se  $\varphi = \pi$ . Si nota molto bene da questa formula (ma anche dalla (3)) che la quantità  $h/mc$  ha le dimensioni di una lunghezza. Essa viene chiamata tradizionalmente *lunghezza d'onda Compton*, anche se potrebbe essere meglio chiamarla semplicemente *lunghezza Compton* per non confonderla con la lunghezza d'onda di De Broglie, che vedremo in seguito.

La trattazione del caso generale per  $\varphi$  arbitrario non è molto più complicata. Separando l'equazione vettoriale della conservazione della quantità di moto nelle due direzioni si ottiene:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \\ \frac{h}{\lambda} = \frac{h}{\lambda'} \cos \varphi + p_e \cos \alpha \\ 0 = \frac{h}{\lambda'} \sin \varphi + p_e \sin \alpha \end{array} \right. \quad (8)$$

In questo caso è importante osservare che  $p_e^2 = p_e \cos^2 \alpha + p_e^2 \sin^2 \alpha$  e quindi che le (8) si possono riscrivere come:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{hc}{\lambda} = \frac{hc}{\lambda'} + K_e \\ p_e^2 = h^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} \right) \end{array} \right. \quad (9)$$

Si procede poi sostituendo come in precedenza  $K_e = \sqrt{p_e^2 c^2 + m^2 c^4} - mc^2$  nella prima delle (9), isolando la radice al secondo membro ed elevando al quadrato entrambi i membri; si ottiene quindi

$$\left\{ \begin{array}{l} h^2 c^2 \frac{(\lambda' - \lambda)^2}{(\lambda \lambda')^2} + 2 h m c^3 \frac{(\lambda' - \lambda)}{\lambda \lambda'} = p_e^2 c^2 \\ p_e^2 = h^2 \left( \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda'^2} - \frac{2 \cos \varphi}{\lambda \lambda'} \right) \end{array} \right. \quad (10)$$

Sostituendo la seconda delle (10) nella prima si ricava dopo alcuni passaggi algebrici l'equazione (3).

Se non si fosse trattata in relatività speciale la formula relativistica dell'energia cinetica; se si volesse spiegare la teoria della relatività speciale dopo la meccanica quantistica; o se si volessero in ogni caso separare le difficoltà concettuali di un urto in due dimensioni da quelle derivanti dalla relatività, si potrebbe adottare un approccio ibrido, in cui il fotone viene trattato relativisticamente (cioè nell'unico modo in cui esso può essere trattato) ma l'elettrone si considera non relativistico. Questo corrisponde, partendo dalle (9), a sostituire l'espressione classica per l'energia cinetica dell'elettrone,

$K_e = p_e^2 / 2m$  e sostituendo a questo punto la seconda equazione nella prima. In questo modo si riuscirà a ricavare soltanto una formula approssimata, di forma simile a quella di Compton:

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m c} \left( \frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2 \lambda \lambda'} - \cos \theta \right) \quad (11)$$

In questa formula la parte  $\frac{\lambda^2 + \lambda'^2}{2 \lambda \lambda'}$  diventa approssimativamente pari a uno (il valore corretto) quando la variazione di lunghezza d'onda del fotone disperso è piccola. Infatti, posto  $\lambda' = \lambda + \epsilon$  si ottiene sostituendo nella (11):

$$\lambda - \lambda' = \epsilon = \frac{h}{mc} \left( \frac{2\lambda^2 + 2\lambda\epsilon + \epsilon^2}{2\lambda^2 + 2\lambda\epsilon} - \cos\theta \right) \approx \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta) \quad (12)$$

Dove nel secondo passaggio si è eliminato il termine di second'ordine in  $\epsilon$ . La formula “ibrida” quindi riproduce i risultati sperimentali, che seguono sempre esattamente la (3), solo per piccole variazioni di lunghezza d'onda. Piccole variazioni di lunghezza d'onda avvengono quando l'energia del fotone incidente non è molto elevata, perché in questo caso il fotone cede all'elettrone solo una piccola frazione della sua energia. Approssimativamente, possiamo dire che se la frequenza del fotone incidente è nella banda dei raggi X, sia l'approssimazione iniziale che conduce alla (12), sia quella fatta nella (12) stessa sono ancora giustificate, mentre entrambe non lo sono se la frequenza è maggiore (raggi  $\gamma$ ).

Rimangono alcune cose da spiegare o discutere nei dati di Compton di Figura 2. La prima è l'esistenza del primo picco, ossia di una parte di fotoni che, per qualunque angolo di deviazione, non presentano variazioni di lunghezza d'onda. La spiegazione è che nella formula dell'effetto Compton (3) compare la massa dell'elettrone al denominatore; ma se il fotone che incide sulla grafite, anziché contro un elettrone, urta contro un nucleo di carbonio, occorre sostituire nella formula la sua massa, ben maggiore di quella di un elettrone. La variazione di lunghezza d'onda in questo caso si rivela quindi non misurabile (e comunque certamente non visibile sul grafico) spiegando quindi il primo picco presente nei dati di Compton.

La seconda cosa che richiede un commento è il perché, nei dati, il secondo picco, quello propriamente che caratterizza l'effetto Compton, non è una “riga” verticale su un valore preciso, ma è invece piuttosto allargato, è una distribuzione di possibili lunghezze d'onda che ha come media e come massimo il valore previsto dalla formula (3). La spiegazione in questo caso è che il modello di urto che noi abbiamo considerato nella derivazione della formula prevede che l'elettrone sia inizialmente fermo. Ma questo, per l'elettrone confinato in un atomo, non è vero (se non scegliendo proprio il sistema di riferimento in cui l'elettrone è a riposo, che però in generale non sarà lo stesso sistema di riferimento del laboratorio): ciò che sarà vero nel sistema di riferimento del laboratorio è che la quantità di moto dell'elettrone sarà nulla *in media*. La distribuzione che costituisce il secondo picco di Figura 2 deriva quindi da una media su urti simili a quello di Figura 5 in cui l'elettrone ha però molte possibili quantità di moto iniziali, la cui media su tutti gli urti che avvengono nel tempo è zero.

Le precedenti considerazioni vanno tenute presenti per distinguere sempre il dato reale, sperimentale, dal modello matematico necessariamente più astratto e semplificato, e possono aiutare a non formulare esercizi in modo inadeguato. Ad esempio, se un esercizio sull'effetto Compton viene “contestualizzato” riferendosi ad un preciso setup sperimentale, nel formulare le domande non si può certo assumere che *tutti* i fotoni diffusi seguano la legge (3), ma piuttosto che nei dati vi sia un “picco” corrispondente alla lunghezza d'onda prevista da tale equazione. Al contrario, se l'esercizio si riferisce al modello matematico, ossia al caso astratto dell'urto con elettrone inizialmente fermo di Figura 2, si può richiedere di calcolare, ad esempio, la variazione di lunghezza d'onda senza altre specificazioni.

**Effetto Compton:** esaminando la dispersione di raggi X da cristalli si osserva come la luce diffusa mostri un cambiamento di lunghezza d'onda, non spiegabile con la teoria di Maxwell. L'effetto Compton può essere spiegato assumendo che al fotone, oltre che un'energia  $E = h\nu$  sia associata, come previsto dalla relatività ristretta, anche una quantità di moto di modulo  $p = E/c = h/\lambda$ .

### 1.3. Il problema della doppia fenditura

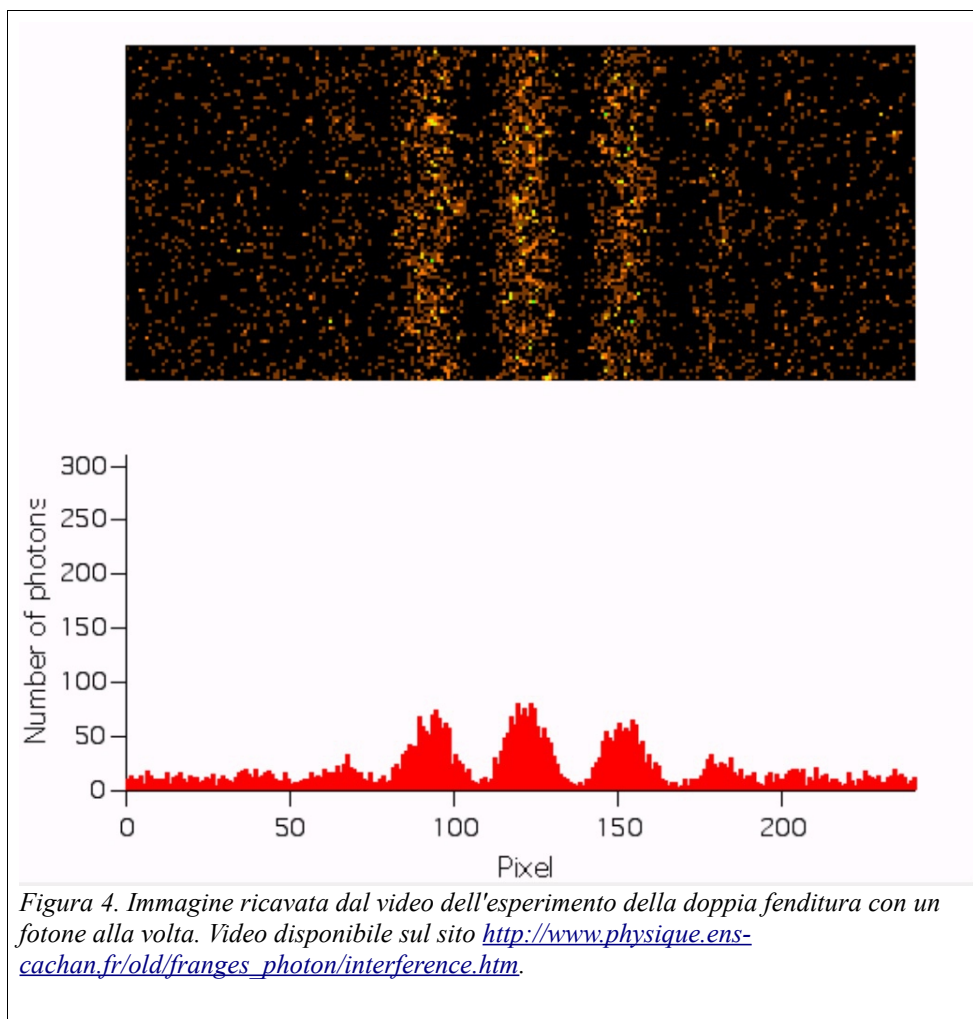
*“The double slit experiment with true single photons is at the heart of quantum mechanics. It is essentially its only mystery.”* (R. Feynman)

Il lavoro di Compton è un'ulteriore conferma dell'ipotesi dei “quanti di luce” di Einstein. Come può allora sorgere la figura di interferenza nell'esperimento di Young, figura considerata per lungo tempo come evidenza sperimentale della natura ondulatoria della luce?

Una possibile spiegazione è che vari fotoni interagiscano tra di loro, disturbandosi e creando frange chiare e scure più comunemente associate a fenomeni ondulatori. Se questa spiegazione fosse corretta, esperimenti in cui in ogni istante al più un fotone è presente nell'apparato mostrerebbero una sparizione della figura di interferenza. Il primo di questi esperimenti fu svolto nel 1913 da G. I. Taylor, tramite il semplice espediente di abbassare l'intensità luminosa della luce fino a che, statisticamente, solo un fotone alla volta avrebbe potuto essere presente nell'apparato; la comparsa delle frange di interferenza confermò però come esse non potessero avere origine dall'interazione tra più fotoni, bensì andassero considerate come un fenomeno che si manifestava sì a livello statistico (su un campione di molti tentativi), ma a partire da una proprietà intrinseca del singolo fotone, che “quasi sempre” andava a colpire quelle che sarebbero diventate le frange chiare, “quasi mai” quelle che sarebbero diventate le frange scure.

La tecnologia del tempo non permetteva di garantire che un solo fotone fosse presente in un determinato istante, e quindi l'esperimento non poteva considerarsi totalmente conclusivo; ripetizioni di questo esperimento in epoca moderna con tecnologie più sofisticate portarono però a confermare gli stessi risultati con la certezza che nell'apparato non potessero essere presenti fotoni multipli. La figura successiva è presa da un video (Figura 4) che mostra l'accumulo sullo schermo retrostante a un sistema di due fenditure di fotoni sparati uno alla volta in un esperimento effettuato nel 2005 in un laboratorio francese da Aspect ed altri.





In questi esperimenti, si osserva che ogni singolo fotone raggiunge lo schermo in una posizione apparentemente casuale, ma una volta che un numero elevato di fotoni è passato la loro distribuzione non è uniforme, bensì ripresenta perfettamente le frange di luce ed oscurità osservate da Young, con molti fotoni che colpiscono le aree di luce e pochi o nessun fotone che arriva nelle zone d'ombra. La creazione delle frange di interferenza non è quindi dovuta ad interazioni tra fotoni diversi ma è un effetto di autointerferenza.

Ecco quindi il problema, che portò Feynman a definire questo esperimento come l'unico mistero della meccanica quantistica: se la luce è immaginata come un'onda, si attribuisce ad essa la proprietà di essere distribuita nello spazio; cosicché per esempio, essa può passare attraverso entrambe le fenditure nell'esperimento di Young, producendo la figura di interferenza.

Ma se, a seguito di evidenze sperimentali in conflitto con l'ipotesi ondulatoria, si adotta un modello della luce come composta di fotoni; e se si osserva l'interferenza persistere anche quando l'intensità della luce è così bassa che **solo un fotone alla volta** passa attraverso le fenditure, quale spiegazione si può fornire?

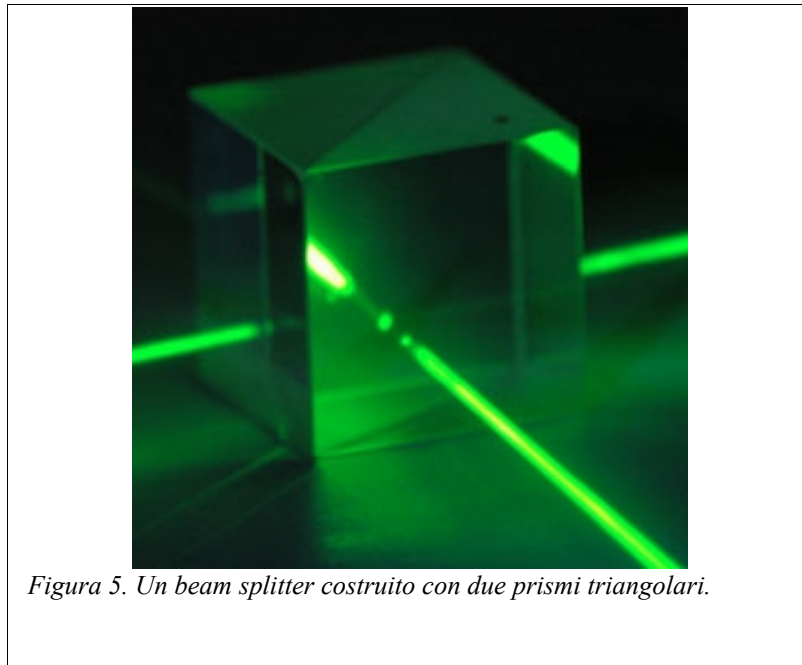
**Il problema della doppia fenditura:** il sorgere delle frange nell'esperimento di Young non è dovuta all'interazione tra fotoni diversi, bensì ad autointerferenza di un singolo fotone. Questo sembra in contraddizione con le proprietà di particella che vanno ascritte al fotone.

## 1.4. Indivisibilità del fotone

Un'altra ipotesi che potrebbe essere avanzata è che il fotone si possa dividere, passando attraverso entrambe le fenditure e quindi che l'interazione tra le due metà generi l'interferenza.

Un esperimento volto ad esaminare questa ipotesi è stato svolto nel 1986, si veda Grangier, P., Gerard R., and Aspect, A. *EPL (Europhysics Letters)* 1(4) (1986): 173; l'università di Erlangen-Norimberga fornisce un laboratorio in remoto all'indirizzo <http://www.didaktik.physik.uni-erlangen.de/quantumlab/english/>. In questo sito, si può trovare questo l'esperimento alla voce “existence photon”.

L'esperimento si avvale di un beam splitter: uno strumento molto utile in esperimenti di ottica che separa un fascio di luce incidente in due fasci distinti. In genere il beam splitter che si utilizzerà negli esperimenti seguenti è costituito da due prismi ottici triangolari, incollati per le loro facce diagonali con una speciale colla dielettrica (Figura 5). Il funzionamento di un tale strumento è basato sulla riflessione parziale: metà della luce incidente al beam splitter viene riflessa e metà viene trasmessa.



Cosa succede se si invia un singolo fotone ad un beam splitter? Lo schema dell'esperimento è come segue (Figura 6):

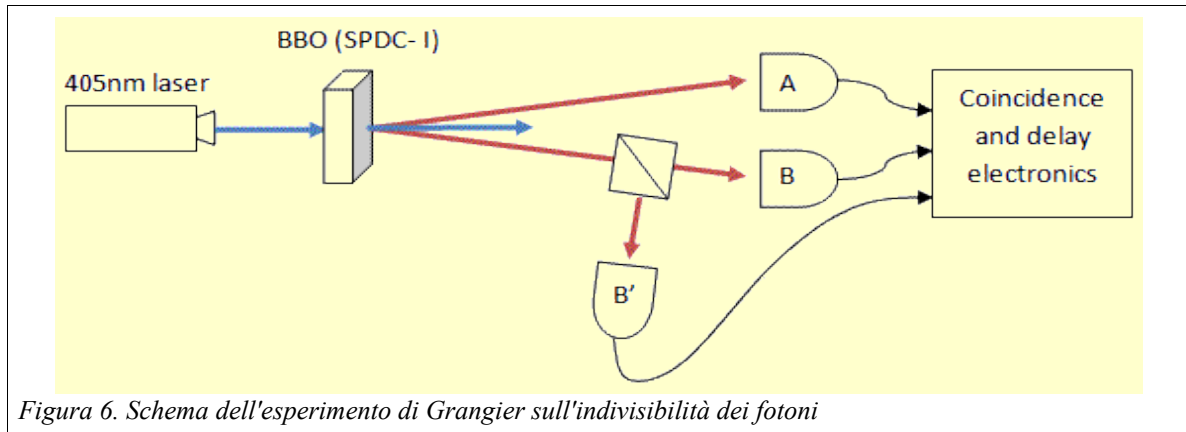


Figura 6. Schema dell'esperimento di Grangier sull'indivisibilità dei fotoni

Il cristallo denominato BBO nello schema emette coppie di fotoni (le frecce rosse) se illuminato con luce di lunghezza d'onda pari a 405 nm. Il fotone inviato verso il rivelatore A è usato come controllo, necessario poiché i rivelatori abbastanza sensibili da poter segnalare la presenza di un singolo fotone possono subire interferenze e segnalare anche altri eventi, come ad esempio raggi cosmici: se il rivelatore A scatta in contemporanea a B o B' allora senza dubbio il cristallo ha emesso una coppia. Il secondo fotone passa attraverso un beam splitter e può arrivare ai rilevatori B o B'. Si osserva che non succederà mai che B e B' scattino assieme; il fotone inferiore rimane sempre unico ed il beam splitter lo riflette o lo trasmette in maniera assolutamente casuale con il 50% di probabilità. Questo esperimento mostra come il singolo fotone sia un oggetto indivisibile, al pari di altre particelle come gli elettroni.

**Indivisibilità del fotone:** il sorgere delle frange nell'esperimento di Young non è dovuta all'interazione tra fotoni diversi, bensì ad autointerferenza dei singoli fotoni. Inoltre, il fotone risulta essere indivisibile, rimuovendo un'altra possibile spiegazione della presenza delle frange chiare e scure.

### 1.5. Legge probabilistica

Gli ultimi esperimenti mostrano chiaramente che dobbiamo interpretare la leggi sull'interferenza, la diffrazione, e in generale qualsiasi previsione riguardante l'intensità della luce, in senso statistico: è importante notare come non si sia in grado di predire con esattezza il comportamento di ogni singolo fotone, l'intensità luminosa prevista è il risultato dall'accumulo di un gran numero di fotoni. Per esempio, non si può predire se un singolo fotone verrà trasmesso o riflesso da uno specchio semiriflettente, è invece possibile predire che, in media, la metà dei fotoni verrà trasmessa e l'altra metà riflessa. Il comportamento del singolo fotone è governato da regole probabilistiche, che devono riportare alla teoria ondulatoria secondo la legge dei grandi numeri.

La legge probabilistica a cui i fotoni obbediscono è però diversa da quello che ci si aspetterebbe nel caso essi fossero delle particelle classiche. La distribuzione di probabilità del fotone nell'esperimento della doppia fenditura è diversa dalla somma delle distribuzioni di probabilità misurate aprendo una singola fenditura alla volta: infatti, le leggi della probabilità ci dicono che se un evento E può avvenire attraverso due eventi A e B che sono mutualmente esclusivi, la probabilità che si verifichi E (ossia che si verifichi l'uno oppure l'altro tra A e B) è data dalla legge

$$P(E) = P(A \vee B) = P(A) + P(B) \quad (13)$$

ma la figura di interferenza che si ottiene nell'esperimento delle due fenditure palesemente non rispecchia questa previsione (Figura 7).

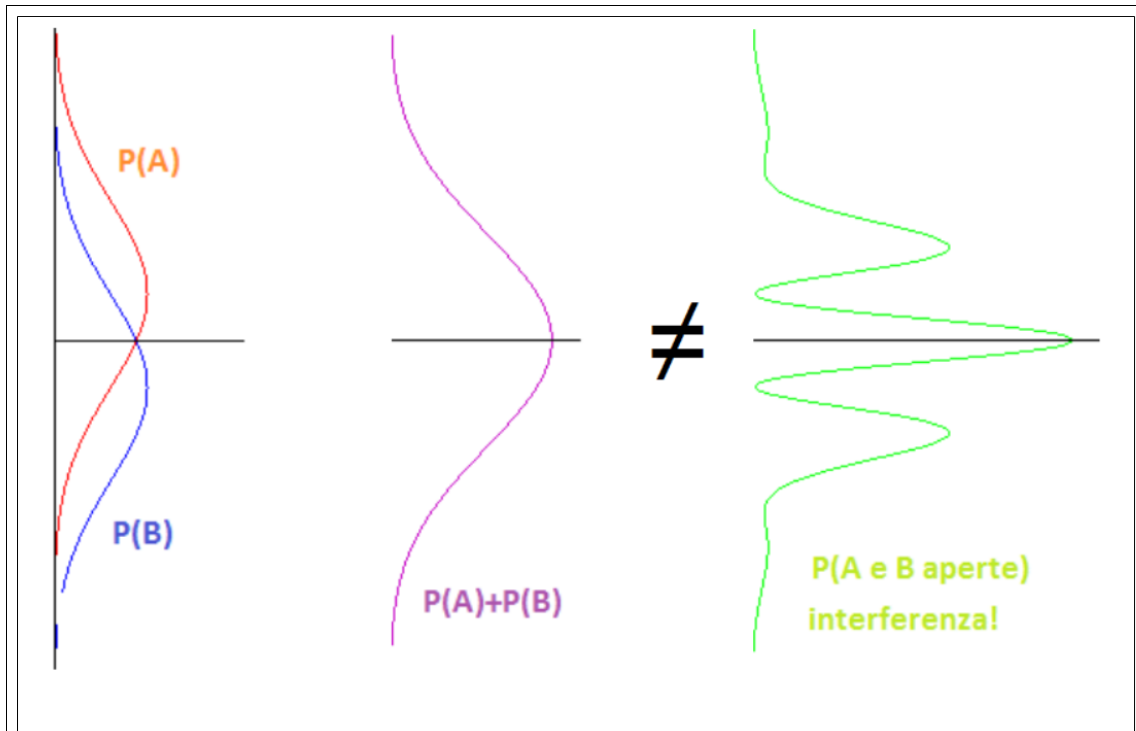


Figura 7. Rappresentazione schematica della distribuzione di probabilità prevista dalle leggi classiche, e di quella effettiva, per l'esperimento delle due fenditure.

D'altronde, gli esperimenti ci mostrano chiaramente che il fotone è indivisibile, e quindi il passaggio del fotone attraverso una fenditura rispetto all'altra *dovrebbe* costituire una coppia di eventi mutualmente esclusivi.

Questo comportamento a prima vista contraddittorio portò i fisici dell'inizio del Novecento a coniare il termine dualità onda-particella, poiché il fotone sembrava comportarsi a volte come onda, a volte come particella. Questa dizione, però, ha subito forti critiche in tempi recenti e molti fisici la ritengono ormai superata. Jean-Marc Lévy-Leblond, in "Le rivoluzioni del XX secolo", commenta la dualità onda-particella ricorrendo ad un aneddoto che riguarda l'imbarazzo dei coloni inglesi in Australia, ai tempi della colonizzazione Britannica, quando vengono in contatto con specie animali sconosciute:

“Immaginate di essere nel XVII, XVIII secolo, tra i malfattori che furono inviati in Australia. [...] Essi sbarcano su questo nuovo continente, in condizioni totalmente sconosciute, non riconoscono niente, né le piante, né gli animali che sono estremamente bizzarri, ci sono insetti che saltano da tutte le parti, ci sono i canguri, e poi, esplorando un po' meglio queste terre, si accorgono che nei corsi d'acqua c'è una specie di bestia un po' timida, che fugge quando qualcuno si avvicina, che è abbastanza strana perché a guardare la sua testa e le sue zampe anteriori somiglia curiosamente ad un'anatra, con un becco da anatra e le zampe palmate, e poi quando uno la guarda da dietro, improvvisamente si accorge che ha quattro zampe, e che si tratta di una creatura pelosa che da dietro somiglia molto di più, diciamo, ad una talpa.

Allora come la chiamano i coloni inglesi? "Duck-mole", anatra-talpa, e descrivono questa bestiola in termini di dualità: anatra-talpa; ma quando riescono a conoscerla meglio e guardarla più da vicino di cosa si accorgono? Eh, che non è un'anatra né una talpa, ma, l'avrete capito, un ornitorinco, e che a meno che non ci si fermi alle sue apparenze estreme, il suo posteriore o la sua testa, non si può confondere né con un'anatra né con una talpa, e che la sua natura profonda è del tutto diversa. Abbiamo esattamente la stessa cosa qui, gli oggetti quantistici sono gli ornitorinchi, nel senso che sono solo aspetti molto specifici che possono far sì che li scambiamo con onde o con particelle, ma la loro propria natura è di un altro genere.”

(Jean-Marc Lévy-Leblond, *"Le rivoluzioni del XX secolo"*)



Figura 8. Un ornitorinco

Il fotone non è quindi da considerarsi né onda né particella, né tantomeno un'ibrido delle due. Esso è un oggetto quantistico, un “quanto” o “quantone”, ed in quanto tale ha determinate proprietà che in alcuni casi assomigliano a quelle delle particelle (per esempio l'indivisibilità) ed in altri casi assomigliano a quelle delle onde (ad esempio la possibilità di interferenza).

**Legge probabilistica:** gli oggetti quantistici si comportano diversamente sia dalle particelle classiche sia dalle onde, ma presentano proprietà simili ad entrambe.

È impossibile predire con precisione il comportamento di singolo fotone. Esso si comporta in maniera apparentemente casuale, ma è possibile predire la distribuzione di probabilità per grandi numeri di fotoni identici. È quindi possibile predire il comportamento medio dei fotoni e la probabilità che esso si comporti in una determinata maniera.

## 2. Il modello di Feynman

Iniziamo ora la descrizione matematica del comportamento degli oggetti quantistici dovuta a Feynman. Innanzitutto, si deve entrare nell'ordine di idee che l'unica maniera per sapere dov'è un oggetto quantistico è rivelarlo. Nei problemi che riguardano fotoni avremo quindi tipicamente una **sorgente** in grado di emettere fotoni, e uno o più **rivelatori** (che generalmente considereremo ideali, ossia con efficienza 100%) in grado di rivelare la presenza del fotone in quel punto.

Il modello di Feynman si basa su un concetto fondamentale: nel cammino da sorgente a rivelatore, non si può assumere che il fotone percorra una singola traiettoria ben definita, ma occorre invece considerare **tutti i possibili cammini** tra la sorgente ed il rivelatore, cammini che devono però essere compatibili con i vincoli del sistema; ad esempio, la presenza di uno schermo impedisce al fotone di percorrere cammini che passino attraverso le parti opache di tale schermo.

Ogni cammino contribuisce alla probabilità che il fotone arrivi al rivelatore nel seguente modo: associamo ad ogni possibile cammino un'ampiezza o fasore; l'ampiezza è un vettore di lunghezza unitaria, il cui angolo di fase  $\varphi$  varia lungo il cammino (con l'effetto di far "ruotare" il vettore) seguendo regole identiche a quelle di propagazione di un'onda classica:  $\varphi = kx - \omega t$ , dove  $x$  è la lunghezza del cammino,  $t$  è il tempo trascorso e  $k = 2\pi/\lambda$  è il numero d'onda.

Una volta calcolati i vettori associati a tutti i cammini possibili, l'ampiezza finale è pari alla somma vettoriale di tutti questi vettori. La probabilità di rivelare il fotone è proporzionale al quadrato del modulo dell'ampiezza finale. La probabilità effettiva si ottiene tramite normalizzazione, problema che si affronterà in seguito. In conformità all'uso corrente in fisica quantistica indicheremo le ampiezze con la lettera greca  $\psi$ . Otteniamo quindi una fondamentale legge quantistica, alternativa alla (13): se un evento  $E$  può accadere tramite due processi  $A$  e  $B$  che in linea di principio non possono essere distinti attraverso un possibile esperimento, allora la probabilità dell'evento è ottenuta sommando le ampiezze (fasori) associate ai processi  $A$  e  $B$ , ed elevando poi al quadrato la lunghezza dell'ampiezza risultante.

$$P(E) = |\psi(A) + \psi(B)|^2 \quad (14)$$

Analogamente con tre o più processi. Enunciamo quindi una fondamentale legge quantistica per la somma delle probabilità:

**Fasori, ampiezze e numeri complessi:** In quanto vettori bidimensionali, i fasori e le ampiezze possono essere rappresentati con numeri complessi dall'uguale intensità e fase; questa è la rappresentazione preferita dai fisici per eseguire più facilmente i calcoli, ma il metodo di Feynman rimane valido a prescindere dalla scelta di come rappresentare ampiezze e fasori.

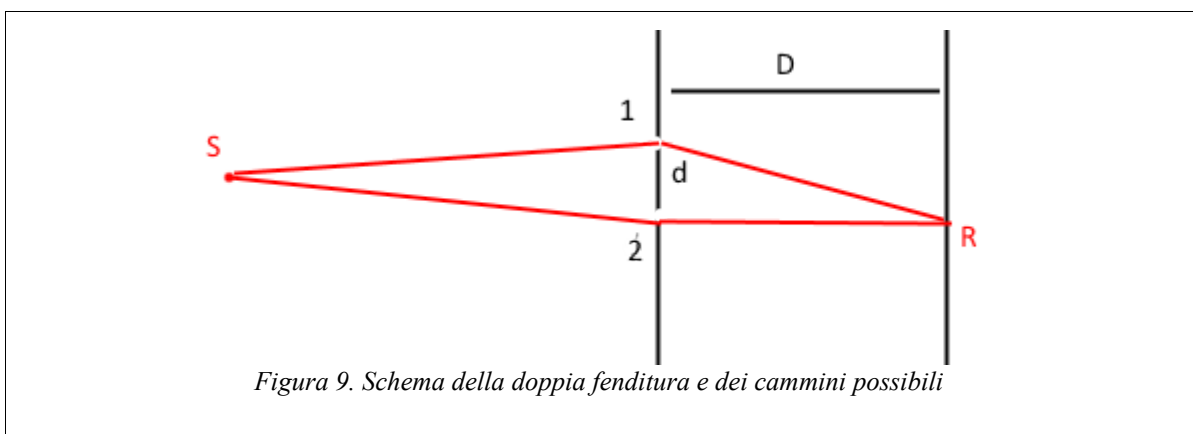
Considereremo qui solo il caso di problemi stazionari, cioè indipendenti dal tempo. In questo caso l'angolo di fase può essere espresso dalla più semplice relazione  $\varphi = k x$ . Come per l'onda elettromagnetica, il numero d'onda del fotone dipende dal materiale in cui esso si sta propagando:

**Nei materiali:** Se il fotone non si sta muovendo nel vuoto ma in un materiale ad indice di rifrazione  $n$ , il numero d'onda diventa  $k = 2\pi n/\lambda$ .

**Il modello di Feynman:** la probabilità per un fotone emesso da una sorgente di essere rivelato da un rivelatore dipende da tutti i cammini possibili tra sorgente e rivelatore. Ad ogni cammino è associato un *fasore*, un vettore bidimensionale di lunghezza unitaria ed angolo di fase  $\varphi = k x$ . Sommando tutti questi fasori si ottiene l'*ampiezza*, un vettore la cui intensità elevata al quadrato è direttamente proporzionale alla probabilità cercata.

## 2.1. Interferenza tra due fenditure con Feynman

Esaminiamo ora il problema dell'interferenza di fotoni da due fenditure usando il metodo di Feynman. Sia S la sorgente, 1 la prima fenditura, 2 la seconda fenditura. Sia  $d$  la distanza tra le fenditure,  $D$  la distanza dello schermo dalle fenditure, R il rivelatore sullo schermo (Figura 9).



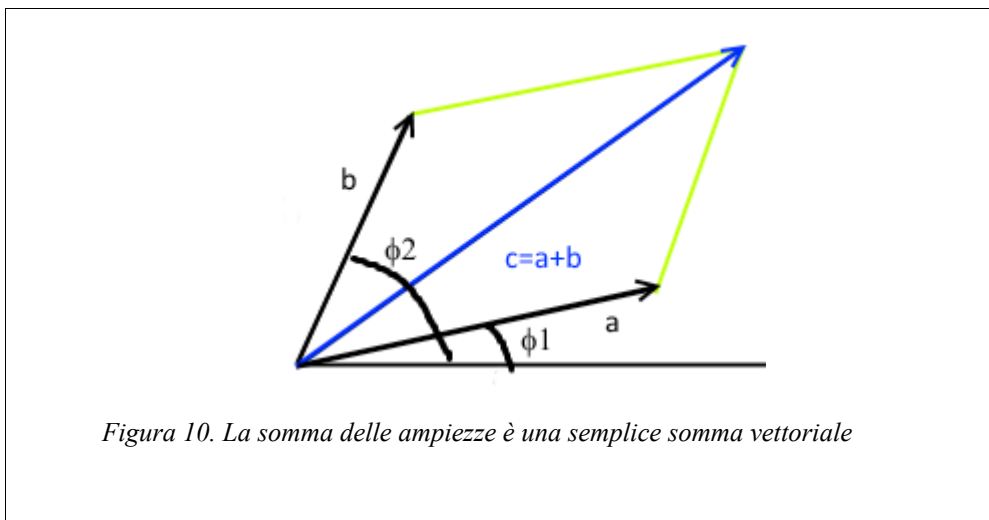
Il fotone può raggiungere il rivelatore tramite due cammini: il cammino che passa per 1 e quello che passa per 2, cioè S-1-R ed S-2-R. Le ampiezze associate ai due cammini saranno rappresentate da due vettori di lunghezza unitaria (che, lo ripetiamo ancora una volta, sono “fasori” che rappresenta-



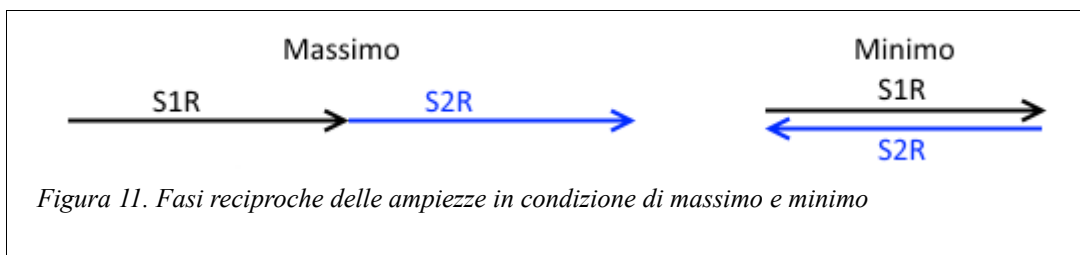
no simbolicamente numeri complessi)

La fase associata al primo vettore è  $\phi_1 = \frac{2\pi}{\lambda} l_1$  dove  $l_1$  è la lunghezza del primo cammino, la fase del secondo è  $\phi_2 = \frac{2\pi}{\lambda} l_2$ . La differenza tra le due fasi è  $\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l$ .

Grazie a note formule trigonometriche, il quadrato del modulo della somma  $c$  di due vettori  $a$  e  $b$  con differenza di fase  $\Delta\phi$  è  $c^2 = a^2 + b^2 + 2ab \cos(\Delta\phi)$ . Poiché entrambi i vettori hanno lunghezza unitaria, la formula si riduce a  $c^2 = 2 + 2\cos(\Delta\phi)$ . Assumendo che la sorgente sia equidistante dalle due fenditure, la probabilità nei vari punti dello schermo può essere trovata dalla differenza di lunghezza tra i cammini dopo le fenditure, calcolabili tramite formule trigonometriche.



In particolare, i massimi si avranno quando i due fasori sono paralleli, i minimi se antiparalleli:



Nel caso di parallelismo,  $\Delta\phi$  è pari ad un multiplo intero di  $2\pi$ , mentre in antiparallelismo  $\Delta\phi$  è un multiplo semiintero. Una differenza tra i cammini pari ad un multiplo della lunghezza d'onda porta quindi ad un massimo, una differenza pari a metà lunghezza d'onda più un numero intero di lunghezze d'onda porta ad un minimo. I massimi si hanno quindi per:

$$\begin{aligned} \Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = 2n\pi \\ \Delta l &= n\lambda \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \tag{15}$$

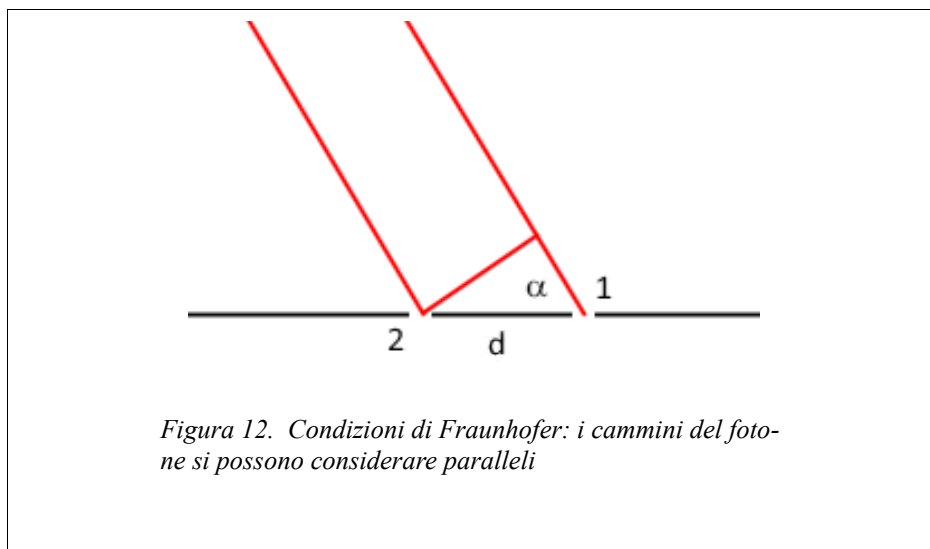


Mentre i minimi per:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= \frac{2\pi}{\lambda} \Delta l = (2n+1)\pi \\ \Delta l &= \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad (n \in \mathbb{Z})\end{aligned}\tag{16}$$

### 2.1.1. Approssimazione di Fraunhofer

Poniamoci ora con lo schermo molto lontano dalle fenditure,  $D \gg d$ . Sotto queste condizioni, che vengono dette di Fraunhofer, i cammini dopo le fenditure si possono considerare in prima approssimazione paralleli.



Se si indica con  $\alpha$  l'angolo formato dai due cammini che portano dalle fenditure al rivelatore con il piano delle fenditure, la differenza di lunghezza tra i cammini diventa pari a  $d \sin(\alpha)$ , e quindi la posizione dei massimi e dei minimi si trova immediatamente sostituendo nelle formule (15) e (16):

$$d \sin(\alpha) = n\lambda \quad \rightarrow \quad \sin(\alpha) = n \frac{\lambda}{d}\tag{17}$$

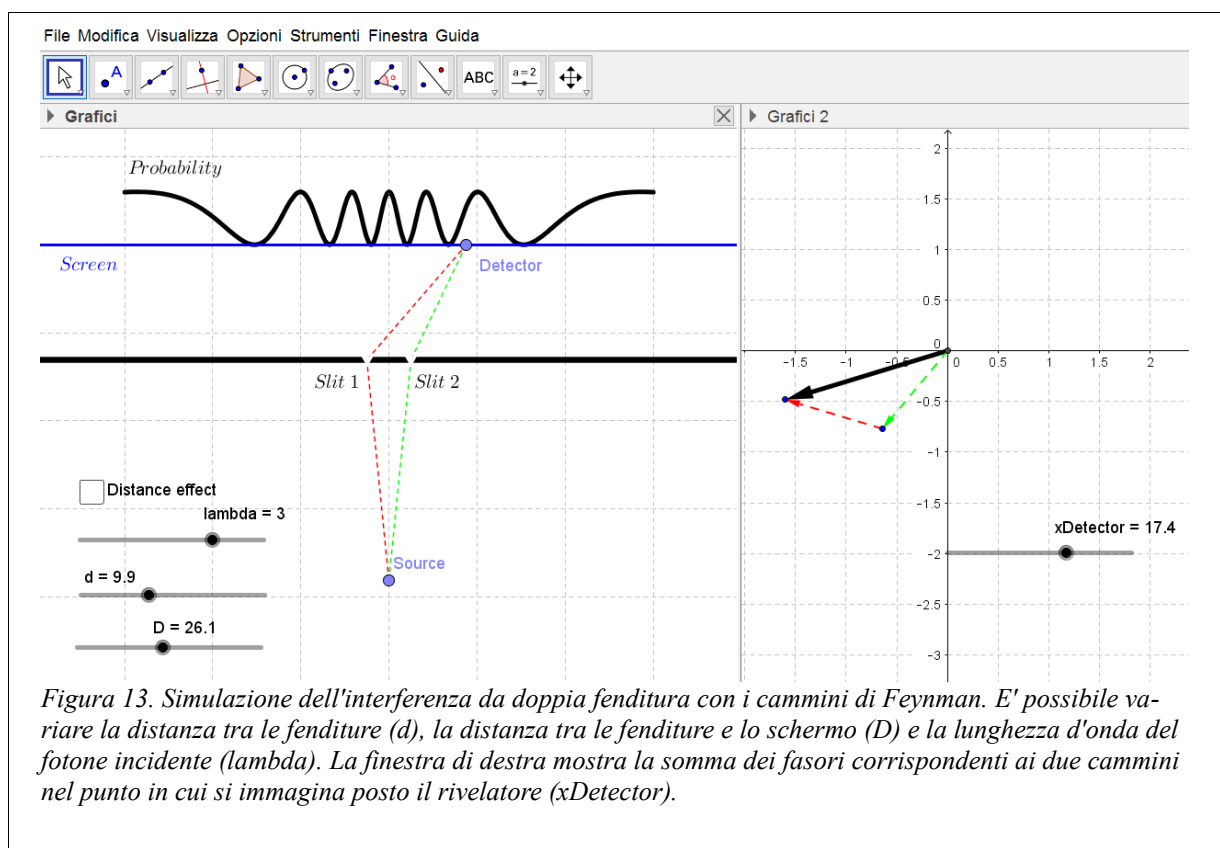
Per i massimi, e

$$d \sin(\alpha) = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda \quad \rightarrow \quad \sin(\alpha) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\lambda}{d}\tag{18}$$

Per i minimi. Queste posizioni corrispondono a quelle effettivamente misurate sperimentalmente.

**Doppia fenditura:** utilizzando il metodo di Feynman si riesce a calcolare la distribuzione di probabilità di rivelare un fotone nell'esperimento di Young con la doppia fenditura. Due cammini sono possibili per il fotone, uno per fenditura, per passare dalla sorgente al rivelatore, posto in un punto sullo schermo. La somma dei fasori associati a questi cammini porta all'ampiezza finale, il cui modulo elevato al quadrato è proporzionale alla probabilità effettivamente misurata dell'arrivo del fotone nel punto considerato.

E' possibile visualizzare il funzionamento del modello tramite la simulazione realizzata con GeoGebra disponibile al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/efBI3J9a>, dell'interferenza da doppia fenditura risolta con il metodo della somma sui cammini. L'utilizzo della simulazione non richiede l'installazione del software GeoGebra.



## 2.2. Diffrazione da fenditura singola con Feynman

Si esamini ora la diffrazione da fenditura singola, sempre in condizioni di Fraunhofer per semplicità. In questo caso, non abbiamo più un numero finito di cammini, ma un cammino per ogni punto della fenditura. Il calcolo della distribuzione di probabilità esatto richiede la risoluzione di un integrale a valori complessi, ma la posizione dei minimi può essere calcolata più facilmente senza dover usare gli integrali. La Figura 14 è prodotta utilizzando la simulazione della diffrazione da singola fenditura, disponibile al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/VljzT1uw>.

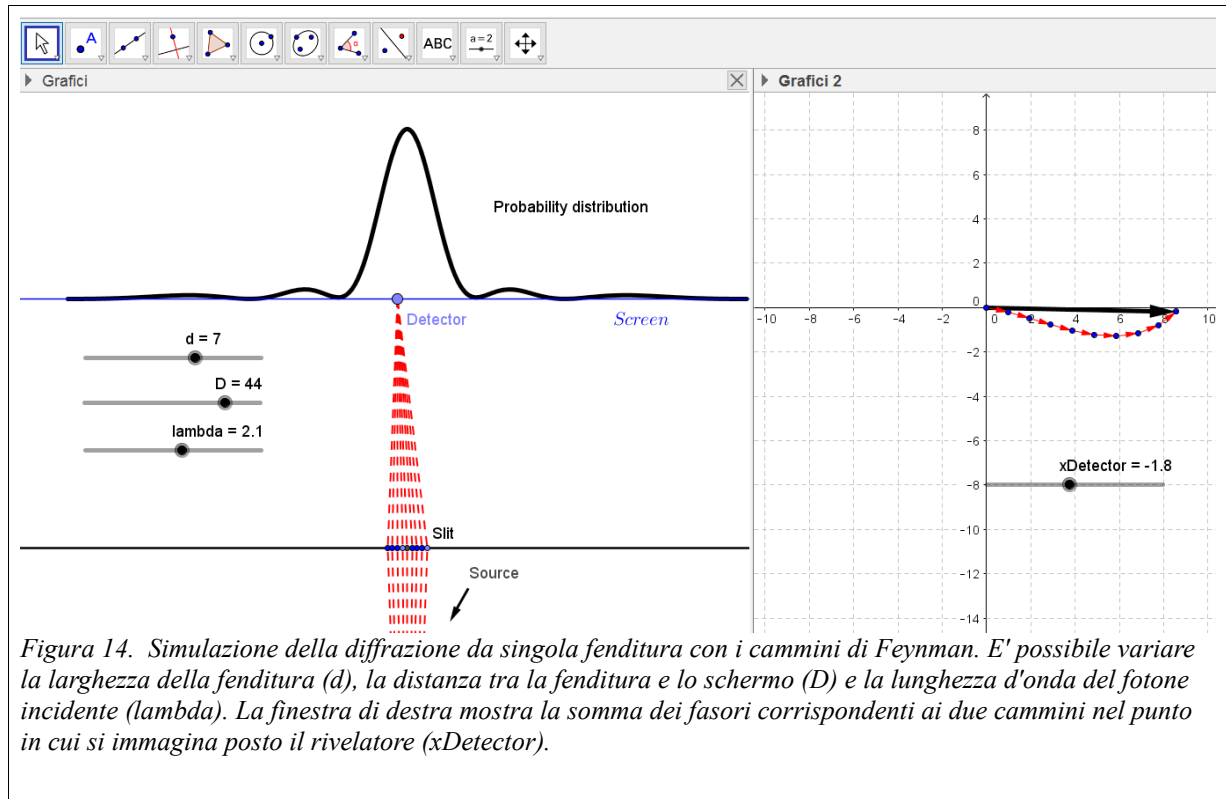


Figura 14. Simulazione della diffrazione da singola fenditura con i cammini di Feynman. E' possibile variare la larghezza della fenditura ( $d$ ), la distanza tra la fenditura e lo schermo ( $D$ ) e la lunghezza d'onda del fotone incidente ( $\lambda$ ). La finestra di destra mostra la somma dei fasori corrispondenti ai due cammini nel punto in cui si immagina posto il rivelatore ( $x_{\text{Detector}}$ ).

Sia  $d$  la larghezza della fenditura; consideriamo le coppie di punti della fenditura a distanza  $d/2$  l'uno dall'altro. Risulta chiaro che queste coppie di punti esauriscono tutti i punti della fenditura e che la differenza di lunghezza dei cammini che passano per tali punti è  $(d/2)\sin(\alpha)$ . Se le ampiezze associate ad una coppia di cammini risultano antiparallele, la somma per la singola coppia è nulla, e quindi anche la somma di tutte le coppie dovrà essere nulla. La condizione di minimo diventa quindi

$$\sin(\alpha) = \left(n + \frac{1}{2}\right) \left(2 \frac{\lambda}{d}\right) \rightarrow \sin(\alpha) = (2n+1) \frac{\lambda}{d} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (19)$$

La condizione descritta individua sempre dei minimi, ma non tutti. Infatti, ad esempio, sono stati lasciati fuori dalla descrizione precedente quei minimi che corrispondono ad un angolo per cui i cammini passanti per due punti distanti  $d/3$  sulla fenditura hanno una differenza di cammino di  $\lambda/3$ , oppure di  $2\lambda/3$ . Per trattare questo caso, si divide la fenditura in tre parti uguali, e si considerano le "triplette" di cammini corrispondenti nelle tre parti della fenditura: in questo caso i fasori formano un triangolo equilatero, e l'ampiezza risultante è ancora nulla. Generalizzando questo ragionamento è possibile derivare una condizione che include tutti i minimi di diffrazione della singola fenditura.

$$\sin(\alpha) = n \frac{\lambda}{d} \quad (n \in \mathbb{Z}, n \neq 0) \quad (20)$$

La posizione dei massimi non può essere invece calcolata senza utilizzare il calcolo integrale. È interessante notare come posizioni sullo schermo a cui corrispondevano massimi di probabilità di rivelazione del fotone nel caso delle due fenditure a distanza  $d$ , diventano invece corrispondenti a posizioni di minimo di probabilità se si aumentano le possibilità di passaggio per la luce creando una singola fenditura di larghezza  $d$ ; questo è un effetto tipicamente quantistico: aumentare il

numero di cammini possibili tra sorgente e rivelatore può avere l'effetto di *diminuire* la probabilità di trovare l'oggetto al rivelatore stesso, a seconda delle posizioni della sorgente, del rivelatore e dei nuovi cammini.

**Diffrazione da fenditura singola:** Si è in grado di calcolare la posizione dei minimi con il metodo di Feynman anche nel caso di diffrazione da fenditura singola. Anche in questo caso il risultato dei calcoli è in accordo con l'evidenza sperimentale.

### 2.3. Solo cammini rettilinei?

La formulazione originaria della fisica quantistica su cui il nostro approccio è basato si chiama “integrale sui cammini”. In questa formulazione, che usa metodi matematici molto avanzati, vengono considerati effettivamente *tutti* i cammini possibili (compatibili con i vincoli imposti al sistema) tra sorgente e rivelatore, compresi quelli ad esempio che percorrono strane curve, che hanno un andamento a zig-zag, e molti altri. Tuttavia, la maggior parte di tali cammini non forniscono un contributo significativo al risultato finale. Nel trasformare l'integrale sui cammini in “somma sui cammini” si fa una scelta sui cammini possibili che, se operata con attenzione, fornisce comunque il risultato corretto.

Per prima cosa, possiamo notare che si sono considerati nei calcoli precedenti solo i cammini rettilinei a tratti. Una giustificazione precisa di questa scelta richiede conoscenze di matematica ben superiori a quelle disponibili al liceo, ma una visualizzazione intuitiva può essere la seguente: la Figura 15 è tratta da una simulazione della somma di cammini per un fotone che si propaga liberamente (disponibile al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/qTK7gICC>). Si può vedere che solo i cammini vicini alla traiettoria classica contribuiscono in modo significativo all'ampiezza finale, mentre i cammini lontani si annullano a vicenda, formando la struttura a spirale dei fasori nella metà destra della figura.

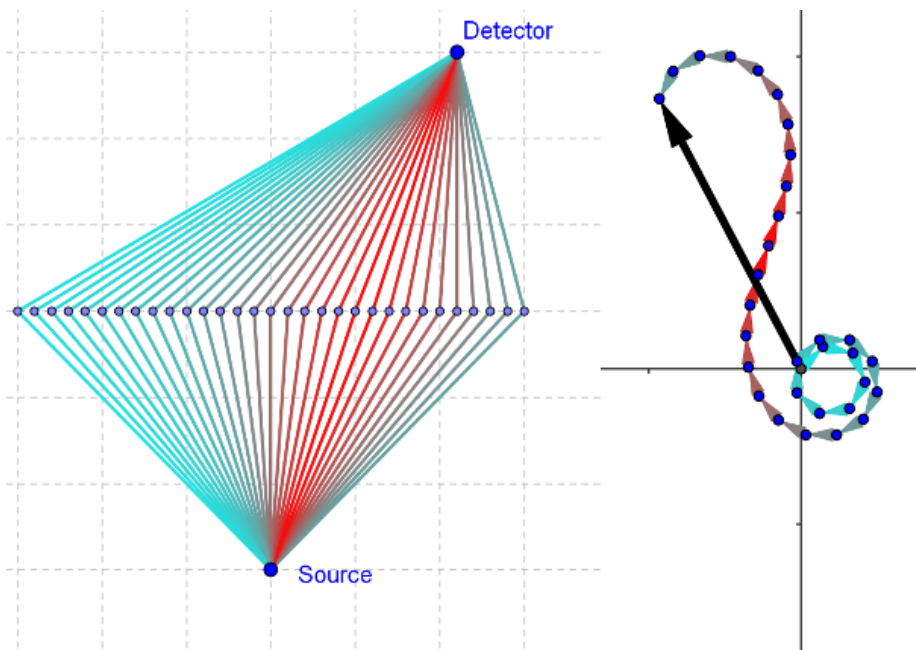


Figura 15. Screenshot di una simulazione della somma di cammini per una particella libera. I cammini sono a sinistra, i fasori associati e l'ampiezza totale a destra. I cammini, e i fasori, che maggiormente contribuiscono all'ampiezza finale hanno una colorazione tendente al rosso.

In sostanza, i cammini rettilinei a tratti sono i più importanti perché corrispondono quasi ovunque alla propagazione classica, e vengono presi come rappresentativi di molti cammini che differiscono molto poco da ciascuno di essi, che non si possono considerare nella somma e che comunque, se fossero considerati, porterebbero un contributo trascurabile.

Una seconda osservazione da fare è che i cammini da considerare devono rappresentare in modo “equo” (uniforme) tutti i cammini possibili. Anche qui, è difficile dare a questo livello una formulazione matematicamente rigorosa di questa regola, che però diventa facilmente comprensibile con degli esempi. Nella simulazione della diffrazione da singola fenditura in Figura 14 abbiamo discretizzato la fenditura in un numero finito di punti, considerando solo i cammini che, partendo dalla sorgente e arrivando al rivelatore, passavano per uno di tali punti. E' intuitivamente chiaro che, se la discretizzazione non fosse stata uniforme, ossia se ad esempio avessimo diviso la parte sinistra della fenditura in un numero di punti maggiore rispetto alla destra, il risultato ottenuto non sarebbe stato corretto. Analogamente, non sarebbe lecito per l'interferenza da doppia fenditura, con fenditure non puntiformi ma identiche, scegliere più cammini che passano per la fenditura di sinistra rispetto a quelli che passano per la fenditura di destra.

**Cammini rettilinei:** è giustificata la semplificazione di esaminare solamente i cammini rettilinei nell'applicazione del modello di Feynman, purchè tali cammini rappresentino “equamente” tutti i cammini possibili. I cammini che si discostano da quello rettilineo hanno fasori associati che si cancellano a vicenda, portando un contributo trascurabile o nullo all'ampiezza finale.

## 2.4. Effetti della riflessione

È opportuno ora introdurre una regola aggiuntiva sui cammini: l'ampiezza di un cammino di un fotone che comprende una riflessione all'interfaccia tra un mezzo ad indice di rifrazione minore ed uno ad indice di rifrazione maggiore subisce uno sfasamento di  $\pi$  ( $180^\circ$ ) rispetto a quella calcolata tramite  $\varphi = kx$ <sup>1</sup>. Questo caso viene comunemente chiamato *riflessione esterna*.

Se la riflessione avviene in senso opposto, quindi all'interfaccia tra un mezzo dall'indice di rifrazione maggiore ad un mezzo dall'indice minore, non si ha sfasamento rispetto a quanto calcolato. Questo caso viene chiamato *riflessione interna*.

La trasmissione di un fotone attraverso l'interfaccia tra mezzi materiali non porta invece ad alcuno sfasamento.

Poiché la riflessione è il risultato dell'interazione luce-materia, la spiegazione di queste regole non può essere svolta senza una teoria quantistica di tali interazioni. Poiché la teoria dell'elettrodinamica quantistica è ben al di fuori del programma richiesto, limitiamoci a prendere atto di queste regole pratiche senza cercarne spiegazioni.

In Figura 16 rappresentiamo uno schema semplificato, che useremo spesso d'ora in poi per facilitare la comprensione, in cui il beam splitter sia costituito da un semplice prisma triangolare:

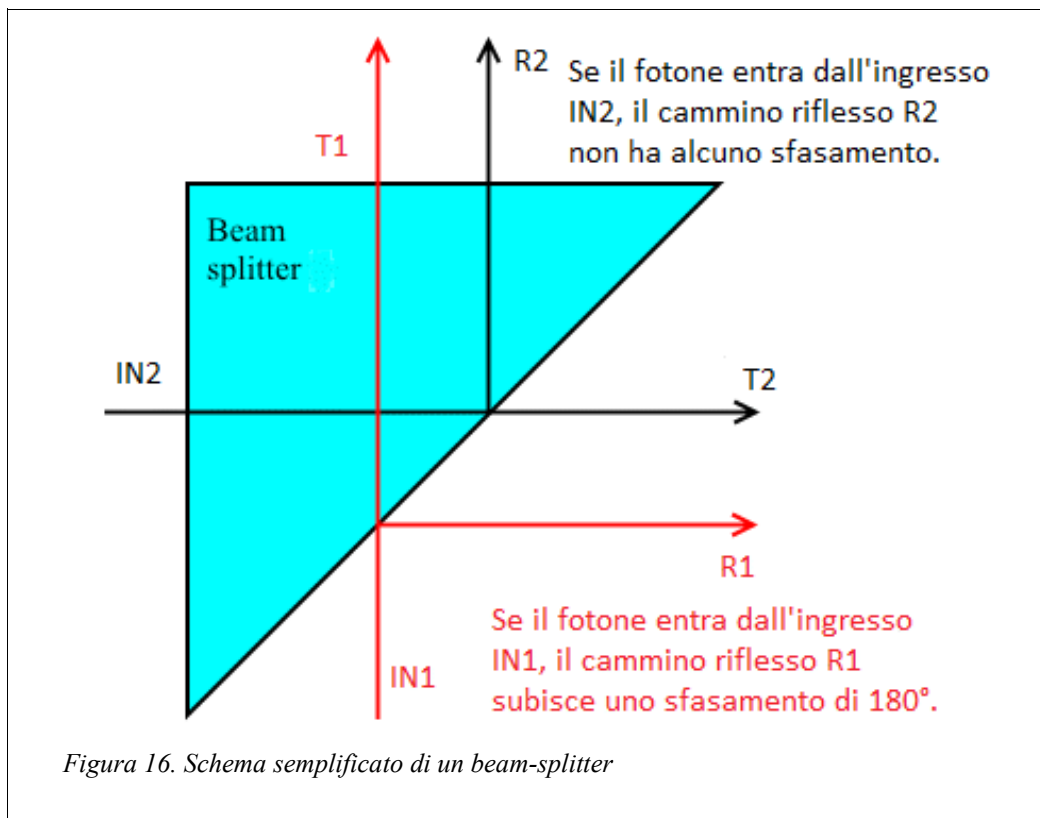


Figura 16. Schema semplificato di un beam-splitter

Come si vede dalla figura, un beam splitter può essere utilizzato come elemento base per portare cammini diversi ad interferire. Infatti, sia che il fotone entri dall'ingresso IN1, sia che entri dall'ingresso IN2, esso avrà il 50% di probabilità di uscire nelle due direzioni indicate dalle frecce. Tuttavia, la situazione vista dai due ingressi non è completamente simmetrica: infatti, se il fotone entra dall'ingresso I1, la riflessione che subisce è interna; ma se entra dall'ingresso I2, essa è esterna. Questo avrà, come vedremo nelle sezioni successive, conseguenze rilevanti nel funzionamento degli in-

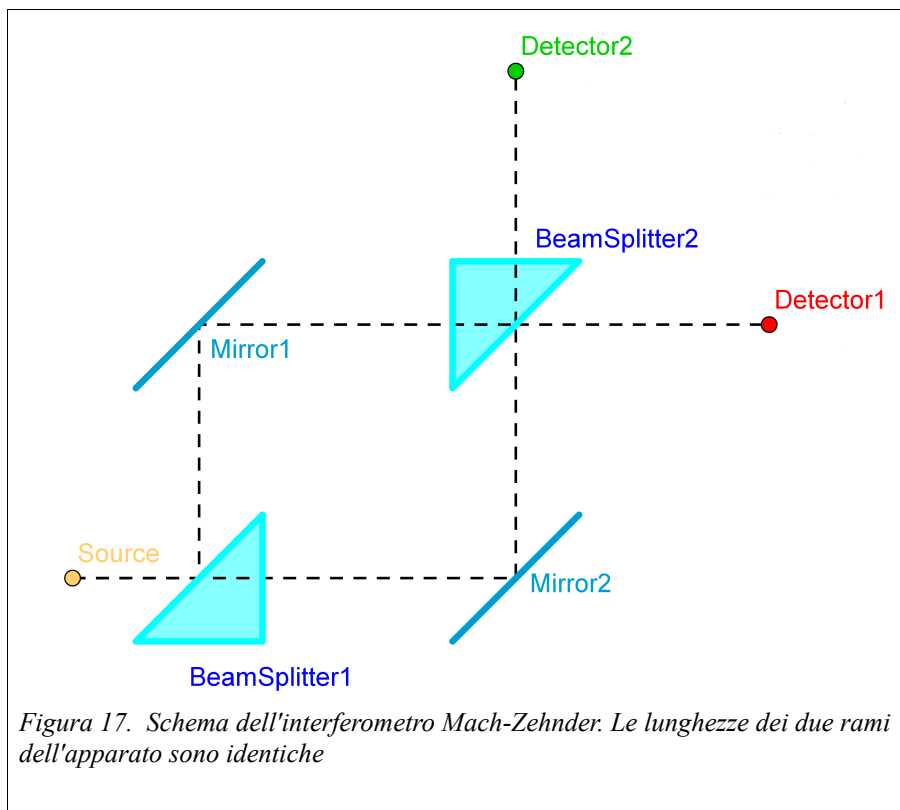
<sup>1</sup> Questo sfasamento è tecnicamente una “perdita” di fase, cioè la fase dopo la riflessione va diminuita, non aumentata, di  $\pi$ . Questo dettaglio è tuttavia al momento irrilevante, anche se avrà qualche importanza nella sezione 6.

terferometri.

**Effetti della riflessione:** l'inclusione di una riflessione in un cammino può causare l'aggiunta di una fase di  $\pi$  all'angolo di fase del fasore associato. L'aggiunta di questa fase deve essere eseguita se il fotone viene riflesso da un mezzo il cui indice di rifrazione è superiore a quello del mezzo ove è presente il fotone.

## 2.5. Interferometro Mach-Zehnder

Un Mach-Zehnder è un apparato di interferometria ottica costituito da due normali specchi e da due beam splitter. Una sorgente emette fotoni, che sono rivelati ad una delle due possibili uscite dell'interferometro. Il Mach-Zehnder è particolarmente semplice da analizzare col linguaggio della somma sui cammini in quanto, almeno nella sua forma base, i cammini che interferiscono hanno tutti uguale lunghezza geometrica, e gli sfasamenti sono dovuti solo al diverso numero di riflessioni.



Si calcoli prima la probabilità che il fotone raggiunga i rivelatori se uno dei rami dell'interferometro è coperto, o se (come nelle figure seguenti) uno degli specchi è rimosso in modo da renderlo non funzionale:

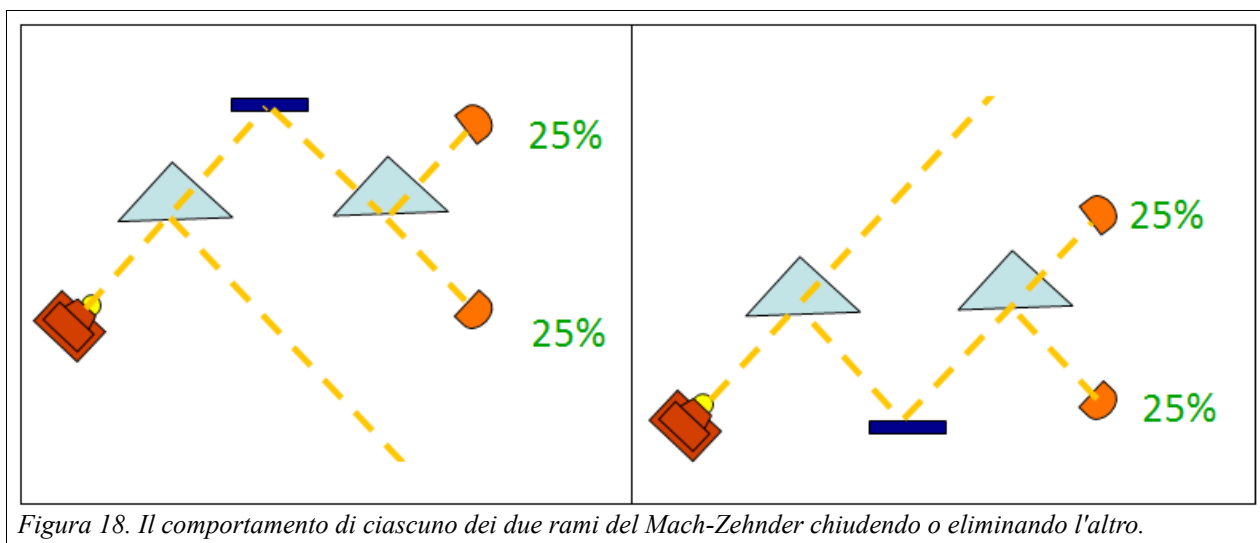


Figura 18. Il comportamento di ciascuno dei due rami del Mach-Zehnder chiudendo o eliminando l'altro.

In entrambi i casi, ad ognuno dei rilevatori arriva un solo cammino, e poiché l'ampiezza associata ai cammini è unitaria, la probabilità di rilevazione dei fotoni è uguale in entrambi i rivelatori, e quindi 25% perché metà dei fotoni originari vanno lungo il ramo che è stato disabilitato.

Se però consideriamo l'apparato nel suo complesso, ad ogni rivelatore arrivano due cammini, e quindi bisogna calcolare l'ampiezza totale risultante ad ogni rivelatore. Tutti i cammini possibili, che arrivino all'uno o all'altro rivelatore, hanno la stessa lunghezza fisica  $l_0$ : possiamo quindi per tutti i vettori ampiezza ignorare la fase complessiva  $\varphi_0 = k l_0$  che sarà comune a tutti i cammini, e considerare solo, per ciascun cammino, gli sfasamenti ulteriori rispetto a tale fase (se rappresentiamo i vettori in un grafico, possiamo anche fissare arbitrariamente  $\varphi_0$  come angolo nullo).

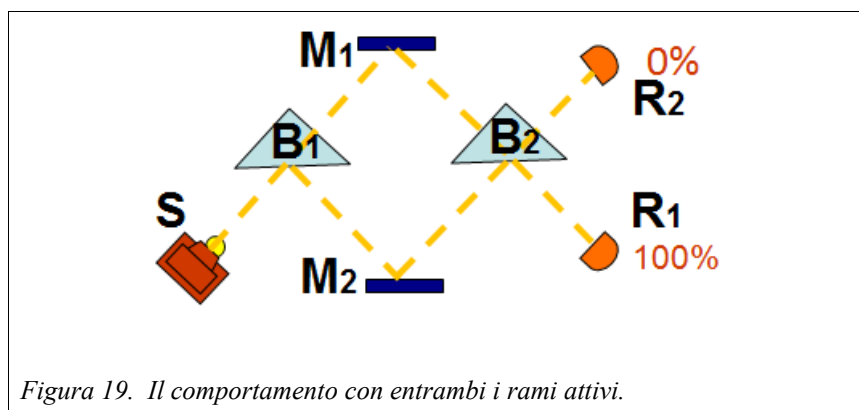


Figura 19. Il comportamento con entrambi i rami attivi.

I cammini che arrivano al primo rivelatore sono  $SB_1M_1B_2R_1$  ed  $SB_1M_2B_2R_1$ :

- $SB_1M_1B_2R_1$ : Il rivelatore  $R_1$  è interessato da un cammino con trasmissione attraverso il primo beam splitter, riflessione esterna su uno specchio e trasmissione attraverso il secondo beam splitter. Il vettore associato al cammino è sfasato di  $\pi$  rispetto all'angolo di riferimento  $\varphi_0$  che corrisponde ad un cammino di lunghezza  $l_0$  senza riflessioni.
- $SB_1M_2B_2R_1$ : il secondo cammino che entra nel rivelatore  $R_1$  ha una riflessione esterna sul primo beam splitter, una riflessione sullo specchio ed una riflessione esterna sul secondo beam splitter. Il vettore associato al cammino è sfasato di  $3\pi$ .



I due vettori associati ai due possibili cammini hanno una differenza di fase pari a  $2\pi$ , quindi sono in fase e la probabilità calcolata al rivelatore 1 è massima.

I cammini che arrivano al secondo rivelatore sono  $SB_1M_1B_2R_2$  ed  $SB_1M_2B_2R_2$  :

- $SB_1M_1B_2R_2$ : Il rivelatore  $R_2$  è interessato da un cammino con trasmissione attraverso il primo beam splitter, riflessione esterna su uno specchio e riflessione interna sul secondo beam splitter. Lo sfasamento sarà quindi  $\pi$ .
- $SB_1M_2B_2R_2$ : il secondo cammino che entra nel rivelatore  $R_2$  ha una riflessione esterna, una riflessione sullo specchio ed una trasmissione attraverso il secondo beam splitter. Lo sfasamento è  $2\pi$ .

I due vettori associati ai due possibili cammini hanno differenza di fase  $\pi$ , sono quindi in opposizione di fase e la loro somma è il vettore nullo. La probabilità calcolata al secondo rivelatore è nulla. Nell'apparato completo, quindi, tutti i fotoni andranno nel rivelatore 1 senza mai venir rivelati dal secondo.

Il risultato è abbastanza sorprendente: infatti, dal punto di vista classico sembrerebbe ragionevole pensare che, se si effettuano, supponiamo, 50 esperimenti (emissione e rivelazione di un singolo fotone) con ciascuno dei due apparati di Figura 18, il risultato statistico dovrebbe essere uguale a quello che si ottiene nel caso in cui si effettuino 50 esperimenti con l'apparato di Figura 19; infatti al beam splitter  $B_1$  il fotone non può che essere trasmesso o riflesso, riconducendo, apparentemente, il caso di Figura 19 all'uno o all'altro dei due casi di Figura 18. Ma così non è, a causa della più importante legge della fisica quantistica: l'interferenza dei processi alternativi indistinguibili che conducono allo stesso risultato.

In altre parole, riscontriamo nuovamente quanto già visto nel caso della doppia fenditura. Se l'evento  $E$  è, ad esempio “rivelazione del fotone a  $R_1$ ”, la fisica classica ci direbbe che  $E$  può avvenire attraverso due possibili casi  $A$  e  $B$  (che il fotone percorra  $SB_1M_1B_2R_1$  oppure  $SB_1M_2B_2R_1$ ) fra loro mutuamente esclusivi e che hanno entrambi una probabilità del 25%, e quindi predirebbe una probabilità  $P(E) = P(A) + P(B) = 50\%$ . In fisica quantistica ciò non è più vero, perché la probabilità va calcolata secondo la relazione (14) che esprime matematicamente quanto detto sopra circa l'interferenza dei processi indistinguibili.

Detto ancora in altri termini, non possiamo pensare che, nell'esperimento completo, il fotone sia passato attraverso uno solo dei due possibili bracci dell'interferometro, perché altrimenti saremmo costretti ad ammettere la validità della formula classica. Il modello del fotone che percorre tutti i cammini possibili *non* significa che esso percorre l'uno o l'altro di essi con una certa probabilità, ma che li “esplora” tutti contemporaneamente, in modo che essi possano interferire.

Una simulazione dell'interferometro Mach-Zehnder, che permette anche di variare la lunghezza di cammino ottico di uno dei due bracci dell'interferometro, è disponibile al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/NvbZqpuA>.

**Interferometro Mach-Zehnder:** nell'interferometro Mach-Zehnder i due rami dell'apparato creano effetti di interferenza nei fotoni che entrano nell'apparato stesso. Il risultato è che a parità di lunghezza dei due cammini un'uscita dell'apparato viene selezionata rispetto all'altra.

### 3. Principio di indeterminazione

Osserviamo di nuovo la diffrazione da fenditura singola di Figura 14. Possiamo osservare, qualitativamente, che la figura di diffrazione si allarga al restringersi della fenditura, e viceversa.

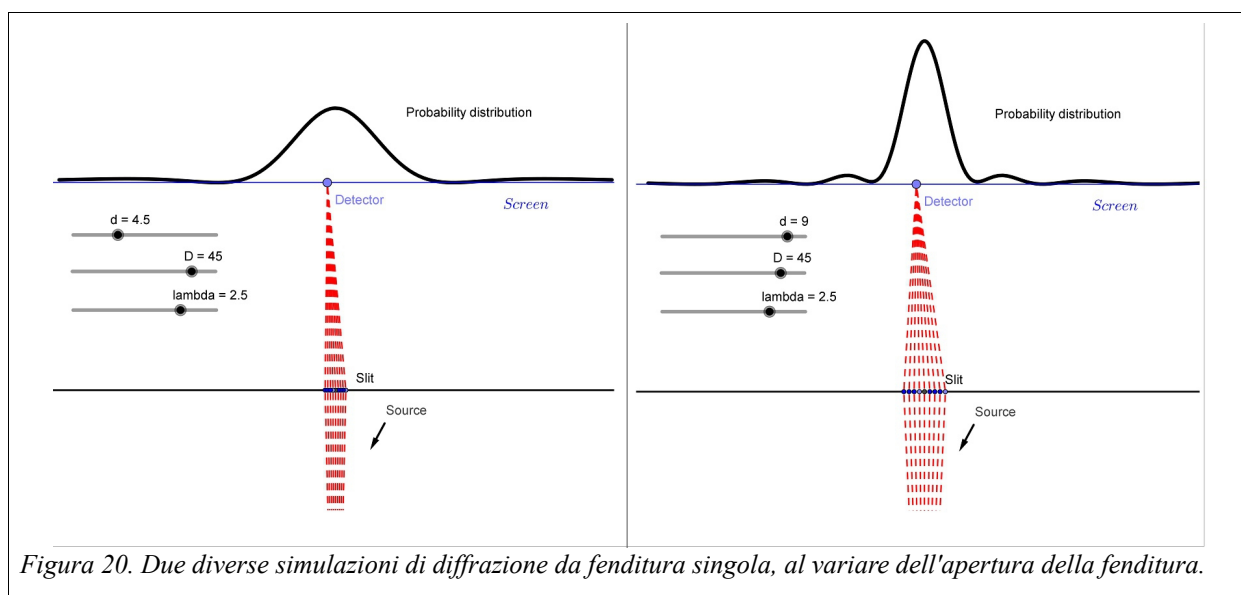


Figura 20. Due diverse simulazioni di diffrazione da fenditura singola, al variare dell'apertura della fenditura.

La semilarghezza della fenditura può essere vista come l'incertezza sulla posizione  $x$  del fotone nel momento in cui passa attraverso lo schermo, ossia possiamo scrivere  $\Delta x = \frac{d}{2}$ . La larghezza della figura di diffrazione si può invece collegare all'incertezza sulla componente  $x$  della quantità di moto del fotone, sempre nel momento in cui attraversa la fenditura. Si può infatti stimare l'incertezza sulla quantità di moto limitandosi a considerare i fotoni che cadono nel picco centrale, dove la probabilità di rivelare il fotone è massima: la semiampiezza angolare del picco è circa  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{d}$  rispetto al centro (vedi (20) in approssimazione di piccoli angoli), da cui  $\Delta p_x \approx p \Delta \theta = \frac{h\lambda}{\lambda d} = \frac{h}{d}$ . L'incertezza sulla posizione  $x$ , quella sulla componente  $p_x$  della quantità di moto sono dunque inversamente proporzionali, e si ottiene:

$$\Delta x \Delta p_x = \frac{d}{2} \frac{h}{d} = \frac{h}{2} \quad (21)$$

L'argomentazione qui presentata è chiaramente qualitativa, ma in fisica quantistica è possibile formalizzarla rigorosamente (teorema di Robertson), arrivando alla relazione esatta

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{h}{4\pi} \quad (22)$$

Relazione che esprime la *minima* indeterminazione sempre presente in un sistema quantistico per la coppia di variabili posizione/quantità di moto (lungo la stessa direzione).

**Principio di indeterminazione:** la posizione e la quantità di moto di un oggetto quantistico non possono essere contemporaneamente ben definite: il prodotto delle loro incertezze non può scendere al di sotto di una quantità minima.

### 3.1. Incompatibilità

Ecco quindi che sorge la nozione di *incompatibilità* tra grandezze fisiche. In linea di principio, nella fisica classica due grandezze fisiche possono essere sempre misurate contemporaneamente con precisione assoluta. In fisica quantistica invece esistono grandezze, dette *incompatibili*, che non possono essere contemporaneamente ben definite con precisione assoluta. La coppia posizione/quantità di moto è l'esempio classico, in quanto fu la prima ad essere individuata dai fisici.

Non è necessario che l'incompatibilità avvenga esclusivamente per coppie di grandezze. Un altro esempio di grandezze *incompatibili* è costituito dalle tre componenti del momento angolare: una conoscenza della componente del momento angolare lungo l'asse  $x$  impedisce la conoscenza delle componenti lungo gli assi  $y$  e  $z$ . Il comportamento di questa terna è descritto da una formula un po' più complicata della (22), nella quale il prodotto delle incertezze su due delle tre componenti è proporzionale al valor medio della terza.

Di contro, si dicono *compatibili* grandezze che in linea di principio si possono misurare in contemporanea con precisione arbitraria. Grandezze compatibili sono per esempio la posizione lungo una direzione e la quantità di moto lungo una direzione perpendicolare ( $x$  con  $p_y$ ), oppure l'energia con la quantità di moto.

**Incompatibilità:** si dicono incompatibili grandezze che per un oggetto quantistico non possono essere contemporaneamente ben definite con arbitraria precisione. Sono per esempio incompatibili tra loro posizione e quantità di moto lungo una stessa direzione; oppure le tre componenti  $x$ ,  $y$  e  $z$  del momento angolare.

### 3.2. Interpretazione del principio di indeterminazione

L'interpretazione del principio di indeterminazione è ancora molto dibattuta in ambito fisico. Agli inizi della meccanica quantistica alcuni (a partire da un famoso articolo di Heisenberg) ritenevano che la relazione di indeterminazione potesse essere dovuta ad un effetto di disturbo dovuto alle misure, ma nella prospettiva moderna il principio di indeterminazione *non* riguarda un disturbo causato al sistema dal processo di misura. Riguarda invece una proprietà intrinseca dei sistemi quantistici, ossia l'impossibilità che essi si trovino, o possano essere appositamente *preparati* (cioè posti) in uno stato in cui i valori di grandezze tra loro *incompatibili* siano entrambe precisamente definite, oltre un certo limite intrinseco.

Utilizzando i termini con precisione, potremmo anche specificare che la relazione di Heisenberg,

così come viene compresa oggi, non riguarda una *incertezza*, ossia non dice che l'oggetto quantistico ha valori precisamente definiti per tutte le grandezze, ma noi per qualche motivo non li possiamo *sapere* tutti insieme con infinita precisione; ma riguarda una vera e propria *indeterminazione*, ossia il fatto che l'oggetto quantistico *non può avere* valori precisamente definiti contemporaneamente per due grandezze incompatibili. Del resto, il fatto stesso di usare il metodo della somma sui cammini significa ammettere che all'oggetto quantistico possono essere associate, nello stesso istante, diverse posizioni.

Sebbene l'indeterminazione non sia, in linea di principio, legata al processo di misura, ma sia una proprietà intrinseca dei sistemi quantistici, essa ha conseguenze sul processo di misura. Ad esempio, nella simulazione con la singola fenditura, prima si è misurata la posizione del fotone e poi se ne è osservata la quantità di moto. La dispersione del fotone al di là della fenditura mostra come sia impossibile prevedere la quantità di moto dopo una misura di posizione lungo lo stesso asse: se la posizione è misurata con incertezza sperimentale  $\Delta x$  allora la quantità di moto non potrà essere predetta con precisione maggiore di quella ottenuta tramite l'equazione (22). Questo è perché misurare la posizione di un oggetto quantistico con incertezza sperimentale  $\Delta x$ , significa porlo in uno stato (in cui, precedentemente, poteva non essere) in cui la massima indeterminazione intrinseca sulla sua posizione è proprio  $\Delta x$ .

Un modo corretto di vedere il principio di indeterminazione in relazione al processo di misura è quello statistico. Ad esempio, si prenda una sorgente che emetta fotoni (o altri oggetti quantistici) completamente indistinguibili tra loro tra di loro, cioè tutti nello stesso stato (in un senso che sarà meglio specificato nel paragrafo seguente). Si esamini un alto numero di tali fotoni, ad esempio un migliaio, e per metà di essi si misuri la posizione con precisione molto elevata e per l'altra metà si misuri la quantità di moto, sempre con alta precisione. Si osserverà che le posizioni misurate in questa modalità avranno valori diversi da fotone a fotone, ed analogamente per le quantità di moto; le incertezze su questi valori, calcolate usando la deviazione standard, obbediranno ai vincoli dell'equazione (22).

**Interpretazione del principio di indeterminazione:** il principio di indeterminazione non è dovuto ad effetti di disturbo dovuti all'esecuzione delle misure, e non rappresenta un'incertezza sperimentale rispetto a un valore "vero", ma è invece una proprietà intrinseca dei sistemi quantistici, che limita la possibilità che i valori di grandezze incompatibili siano contemporaneamente ben definiti.

### 3.3. *Stato di un sistema quantistico\**

Supponiamo di avere un oggetto quantistico confinato su un segmento dell'asse  $x$  di lunghezza  $L$ . La minima indeterminazione possibile sulla componente  $x$  della sua quantità di moto sarà  $\Delta p_x = h/4\pi L$ . Se noi adesso vogliamo confinare l'oggetto quantistico su una lunghezza più piccola,  $l < L$ , possiamo farlo, ma automaticamente dovremo accettare che lo stato in cui l'oggetto quantistico si troverà, abbia una minima indeterminazione sulla componente  $x$  della sua quantità di moto più grande:  $\Delta p_x = h/4\pi l$ . Questo non dipende in alcun modo da come l'operazione di confinare l'oggetto quantistico viene fatta, ma è una proprietà intrinseca che riguarda il suo stato iniziale ed il suo stato finale.

La riflessione sul principio di indeterminazione ci porta a discutere che cosa intendiamo per *stato* di

un sistema quantistico. In meccanica classica, lo stato di una particella puntiforme è l'attribuzione di un valore fissato per la sua posizione e la sua velocità. Ma se attribuire un valore preciso alla posizione e alla componente della quantità di moto (e quindi della velocità) in quella stessa direzione è impossibile per un oggetto quantistico, allora cosa intendiamo per stato di tale oggetto? Ricordiamo che abbiamo detto nel paragrafo precedente che l'indeterminazione non è un effetto della misura, e quindi che non possiamo pensare che l'oggetto quantistico abbia inizialmente una posizione e una velocità entrambe definite con infinita precisione, che il processo di misura rende incerte. Per *stato* di un sistema quantistico dobbiamo quindi intendere, in generale, una codificazione matematica, che contiene tutta l'informazione disponibile sul sistema, inclusi i possibili valori delle grandezze fisiche ad esso associabili, compatibilmente con il principio di indeterminazione.

Una possibile caratterizzazione dello stato di un oggetto quantistico ad un certo istante di tempo è, ad esempio, data dallo specificare tutte le possibili posizioni che l'oggetto può avere a quell'istante, nonché il fasore associato a ciascuna di tali posizioni. Questa caratterizzazione dello stato si chiama "funzione d'onda" (spaziale), e da essa si può estrarre, attraverso un'operazione matematica, anche l'insieme delle possibili quantità di moto attribuibili al sistema. Per un oggetto quantistico senza "spin" (grandezza di cui parleremo in seguito) la funzione d'onda è una rappresentazione completa dello stato del sistema.

### 3.4. Indeterminazione energia-tempo

Oltre alla relazione di indeterminazione tra posizione e quantità di moto qui esaminata, ne esistono altre. Quella probabilmente più importante è quella tra energia e tempo. La formula della relazione è identica a quella tra posizione e quantità di moto:

$$\Delta E \Delta t \geq \frac{h}{4\pi} \quad (23)$$

In questa formula tuttavia non è sempre chiaro ciò che si debba intendere con "indeterminazione sul tempo". Una delle migliori definizioni, anche se qualitativa, è probabilmente la seguente:  $\Delta t$  va inteso come un intervallo di tempo, caratteristico del sistema, nel quale le grandezze fisiche ad esso relative variano significativamente.

Da tale definizione si può comprendere un'importantissima proprietà dei sistemi quantistici: essi possono avere energia fissata con precisione infinita ( $\Delta E=0$ ) solo se, in essi, nessuna grandezza varia mai, ossia se sono *stazionari* ( $\Delta t \rightarrow \infty$ ).

Tra gli effetti dell'indeterminazione tra energia e tempo è da includere quello sugli stati instabili: si prenda uno stato instabile, come quello di un atomo eccitato, un nucleo radioattivo oppure di una particella instabile, cioè lo stato di un sistema che dopo un periodo di tempo decade emettendo energia. Come per tutte le situazioni in meccanica quantistica, è impossibile prevedere il momento esatto in cui accade questo decadimento, ma con una grande collezione di sistemi identici è possibile esaminare il comportamento sui grandi numeri; in particolare, si può misurare la "vita media", cioè il tempo medio in cui tale stato decade. La "vita media" soddisfa la definizione precedente per  $\Delta t$  poiché è certamente la scala di tempo su cui le proprietà caratteristiche del nucleo o atomo eccitato variano significativamente. Così ad esempio, l'isotopo 14 del carbonio ha una vita media di circa 8000 anni, mentre un neutrone non legato in un nucleo ha una vita media di 15 minuti. Il valore energetico di un tale stato instabile non è precisamente definito, ma ha un'indeterminazione  $\Delta E$  tale che il prodotto tra tale indeterminazione e la vita media  $\Delta t$  rispetta l'equazione (23).

**Indeterminazione energia-tempo:** Anche il tempo e l'energia hanno tra di loro una relazione di indeterminazione. In particolare, stati instabili di tempo di vita media  $\Delta t$  risultano avere un'incertezza intrinseca sulla loro energia  $\Delta E$  che soddisfa la relazione di indeterminazione.

## 4. Le particelle massive

Fino ad ora si è parlato soprattutto di luce e fotoni. Che gli elettroni e le particelle massive in generale abbiano un comportamento analogo a quello dei fotoni è stato previsto sin dagli inizi della fisica quantistica, e confermato tramite esperimenti di diffrazione ed interferenza usando come fenditure e reticoli di diffrazione la struttura ordinata degli atomi nei cristalli. Bombardando tali cristalli con elettroni si nota l'evidente presenza di effetti di interferenza negli elettroni in uscita.

Un esperimento di interferenza tramite doppia fenditura con elettroni singoli è stato svolto per la prima volta nel 1976 da un team italiano (Merli, Missiroli, Pozzi); tale esperimento è stato votato dalla comunità scientifica come l'esperimento più bello della fisica ed ha risultati assolutamente identici all'esperimento della doppia fenditura con fotoni singoli (vedi Figura 21). Gli elettroni si comportano quindi come i fotoni.

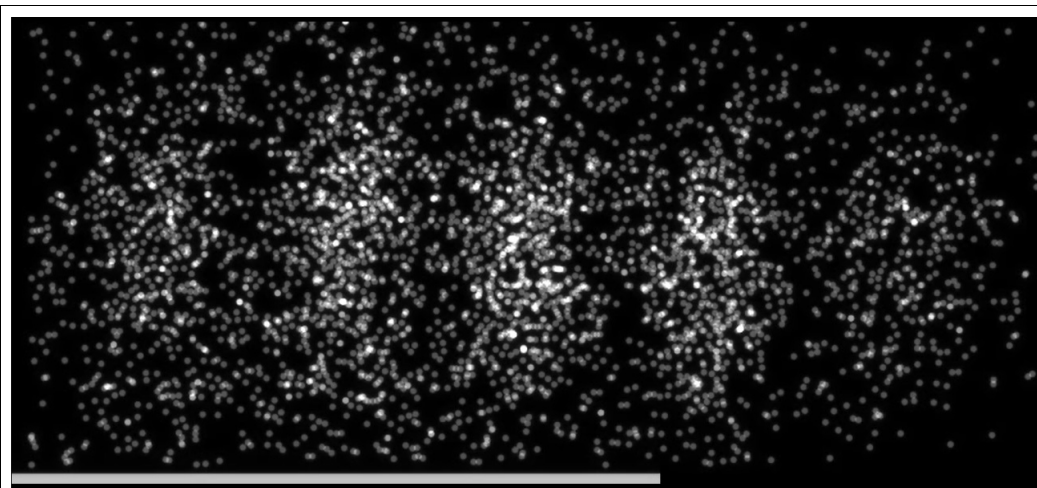


Figura 21. Immagine ricavata dal video dell'accumulo di un elettrone alla volta in un esperimento di interferenza da doppia fenditura eseguito nel 2013, a scopi didattici. Video disponibile al link <http://iopscience.iop.org/1367-2630/15/3/033018/media>

Altri esperimenti sono stati eseguiti con diverse particelle massive, ed addirittura con molecole complesse come il fullerene (60 atomi di carbonio disposti come un pallone da calcio); i risultati sono sempre identici, e mostrano l'insorgere di figure di interferenza.

Come possiamo spiegare ciò? Ripartiamo dalla formula  $\varphi = kx - \omega t$  (con  $k = 2\pi/\lambda$ ) che abbiamo usato per il fotone. Dobbiamo ora trovare il modo di associare anche ad una particella massiva una lunghezza d'onda per calcolare la fase dei cammini.

È possibile mettere in collegamento la quantità di moto di un fotone e la sua lunghezza d'onda:

$$p = \frac{E}{c} \tag{24}$$

$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} \rightarrow p = \frac{h}{\lambda}$$

De Broglie invertì questa relazione e nel 1924 ipotizzò che la lunghezza d'onda associata ad una particella massiva di quantità di moto  $p$  fosse

$$\lambda = \frac{h}{p} \tag{25}$$

Questa ipotesi si rivelò in grado di spiegare quantitativamente i fenomeni di interferenza e diffrazione di particelle massive, la lunghezza d'onda (25) viene oggi denominata “lunghezza d'onda di de Broglie”. È possibile quindi utilizzare lo stesso modello, quello di Feynman della somma sui cammini, avendo cura di sostituire, quando si calcola la fase del vettore che rappresenta l'ampiezza, la lunghezza d'onda del fotone con quella di De Broglie per la particella massiva (la fase risulta quindi, per problemi indipendenti dal tempo,  $\varphi = kx = \frac{2\pi}{\lambda}x = \frac{2\pi p}{h}$  ).

Attenzione: il fatto che sia vera la (25) non autorizza ad utilizzare “all'indietro” le (24) per le particelle massive. In particolare, per esse non vale  $p = \frac{E}{c}$  né  $E = \frac{hc}{\lambda}$  (che sono valide solo per i fotoni) ma le corrette espressioni classiche oppure relativistiche, a seconda del problema considerato.

**Particelle massive:** anche le particelle massive mostrano fenomeni quantistici. Il modello di Feynman può essere applicato anche ad esse, purché si definisca una lunghezza d'onda per il calcolo degli angoli di fase. Tale lunghezza d'onda, chiamata lunghezza d'onda di de Broglie, è  $\lambda = \frac{h}{p}$  .

## 5. L'effetto dell'informazione sui cammini

Nell'analizzare l'esperimento Mach-Zehnder nella sezione 2.5. abbiamo concluso che, quando l'apparato è utilizzato nella sua forma completa, non è possibile asserire che il singolo fotone sia passato solo attraverso l'uno, oppure l'altro, dei bracci dell'interferometro, ma è necessario pensare che li abbia “esplorati” entrambi. La stessa cosa vale per l'esperimento della doppia fenditura con un fotone alla volta di Figura 4, o con un elettrone alla volta di Figura 21: non è possibile affermare che gli oggetti quantistici che arrivano sullo schermo siano passati solo dall'una o dall'altra delle due fenditure. Tuttavia, si potrebbe pensare di porre un rivelatore su ciascuna delle fenditure, il quale, disturbando il meno possibile il passaggio del fotone o dell'elettrone, riesca a determinare se esso sia passato o meno. Cosa accadrebbe allora?

La risposta è che i rivelatori (ammesso che abbiano un'efficienza del 100%) vedrebbero sempre il fotone passare attraverso o l'una o l'altra delle due fenditure, ma in tal caso non si formerebbe più alcuna figura di interferenza sullo schermo. Possiamo interpretare il risultato in questo modo: se ho un'informazione, un dato di realtà che consente di distinguere quali cammini l'oggetto quantistico *non può* aver preso, tal cammini non vanno più conteggiati tra quelli *possibili*. I cammini possibili,



quindi, non sono solo quelli compatibili con i vincoli fisici imposti al sistema, ma anche con l'informazione disponibile su di esso.

È quindi il fatto in sé di ottenere informazione su quale cammino ha preso il fotone che provoca la distruzione della figura di diffrazione, e non un effetto di disturbo dovuto ai rivelatori.

Si può anche esprimere lo stesso concetto da un punto di vista leggermente diverso: la formula (14), che esprime il modo in cui si calcolano le probabilità in fisica quantistica e, essenzialmente, è responsabile della nascita di effetti di interferenza, vale per un evento  $E$  che può avvenire attraverso due canali  $A$  e  $B$  alternativi e *indistinguibili*. Se i due canali, come nel caso dell'esperimento della doppia fenditura in cui si ponga un rivelatore atto a rivelare il passaggio dell'oggetto quantistico, diventano *distinguibili*, allora la probabilità non va più calcolata attraverso la formula (14), ma utilizzando la più semplice formula (13), che fornisce la probabilità classica per un evento che può avvenire in due modi mutuamente esclusivi, e non conduce ad alcun effetto di interferenza.

Una simulazione GeoGebra dell'interferenza da doppia fenditura con la possibilità di acquisire informazione su quale delle due vie l'oggetto quantistico ha percorso può essere di aiuto per chiarire quanto precedentemente esposto. La simulazione è disponibile all'indirizzo <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/GALGGPlo>.

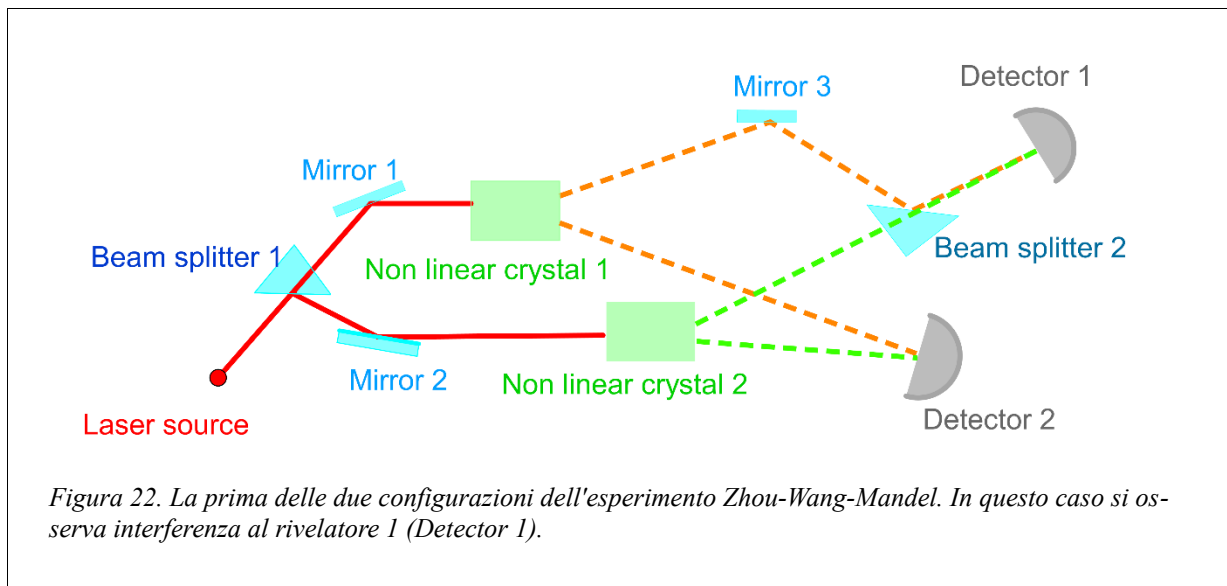
### 5.1. *L'esperimento di Zhou, Wang e Mandel*

L'esperimento Zhou-Wang-Mandel è una verifica sperimentale di questa spiegazione, ottenuta tramite misure che non implicano interazioni con l'oggetto quantistico che si vuole studiare. In questo esperimento, la luce emessa da una sorgente laser a bassa intensità passa attraverso un beam splitter, dove è divisa in due fasci, ognuno dei quali è indirizzato verso un cristallo “non lineare”, che, se eccitato da un laser è capace di emettere fotoni a coppie, con frequenze diverse e in diverse direzioni. Per comodità questi due fotoni (per ciascuna coppia) saranno chiamati “di segnale” e “di controllo”.

A causa della bassa intensità del laser che guida l'apparato, statisticamente uno solo dei due cristalli viene eccitato, e quindi in ogni momento (tranne eccezioni statisticamente irrilevanti) vi è una sola coppia di fotoni nell'apparato, che è emessa o dal cristallo 1 o dal cristallo 2.

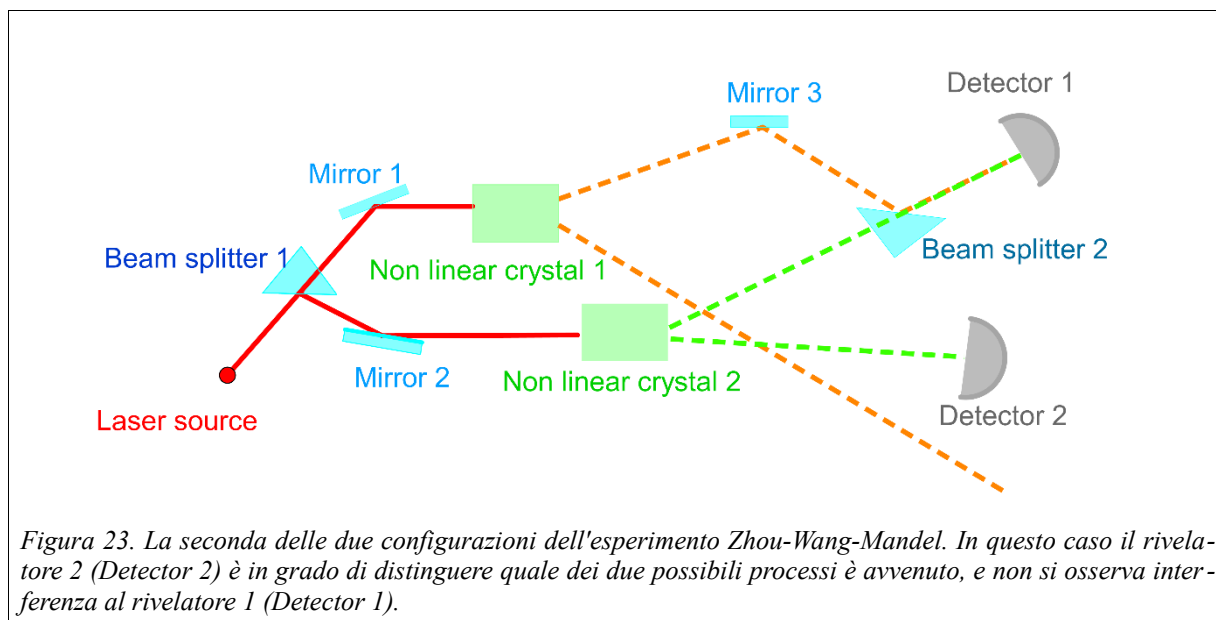
In questo esperimento, il fotone “di segnale” di ciascuna coppia è utilizzato per osservare (o non osservare) una figura di interferenza; esso è quindi l'analogo del fotone lanciato contro un sistema di due fenditure. Il fotone “di controllo” di ciascuna coppia è invece utilizzato per osservare (o non osservare) quale dei due cristalli ha emesso la coppia, e quindi quale dei due processi che possono portare al risultato finale è avvenuto. Esso è l'analogo di un rivelatore capace di ottenere informazione “which way”.





Nella configurazione visibile in Figura 22, l'apparato è allineato in modo tale che, indipendentemente da quale dei due cristalli emetta la coppia, il fotone “di controllo” sia comunque diretto verso il rivelatore 2. In questo modo, gli eventi “il cristallo 1 ha emesso la coppia” e “il cristallo 2 ha emesso la coppia” sono realmente indistinguibili, e di conseguenza possono interferire: se la lunghezza di uno dei due possibili cammini ottici del fotone “di segnale” viene variato, si osserva una figura di interferenza al rivelatore 1 (Figura 24, linea A).

Ma se l'apparato viene allineato in modo tale che solo in uno dei due casi possibili (in Figura 23, se la coppia è emessa dal cristallo 2) il fotone “di segnale” arrivi al rivelatore 2, allora i due processi non sono più indistinguibili (il dato del rivelatore 2 è in grado di distinguerli) e variare uno dei due possibili cammini ottici del fotone “di segnale” non ha più alcun effetto: il conteggio al rivelatore 1 rimane costante (Figura 24, linea B).



Il risultato dell'esperimento è abbastanza sorprendente: infatti dal punto di vista del fotone “di segnale” nulla sembra essere cambiato nei due differenti setup dell'apparato: il suo percorso non viene in alcun modo modificato; eppure, il fatto che l'apparato sia in grado di distinguere, attraverso il fo-

tone “di controllo”, da quale dei due cristalli esso è stato emesso, modifica il risultato dell'esperimento.

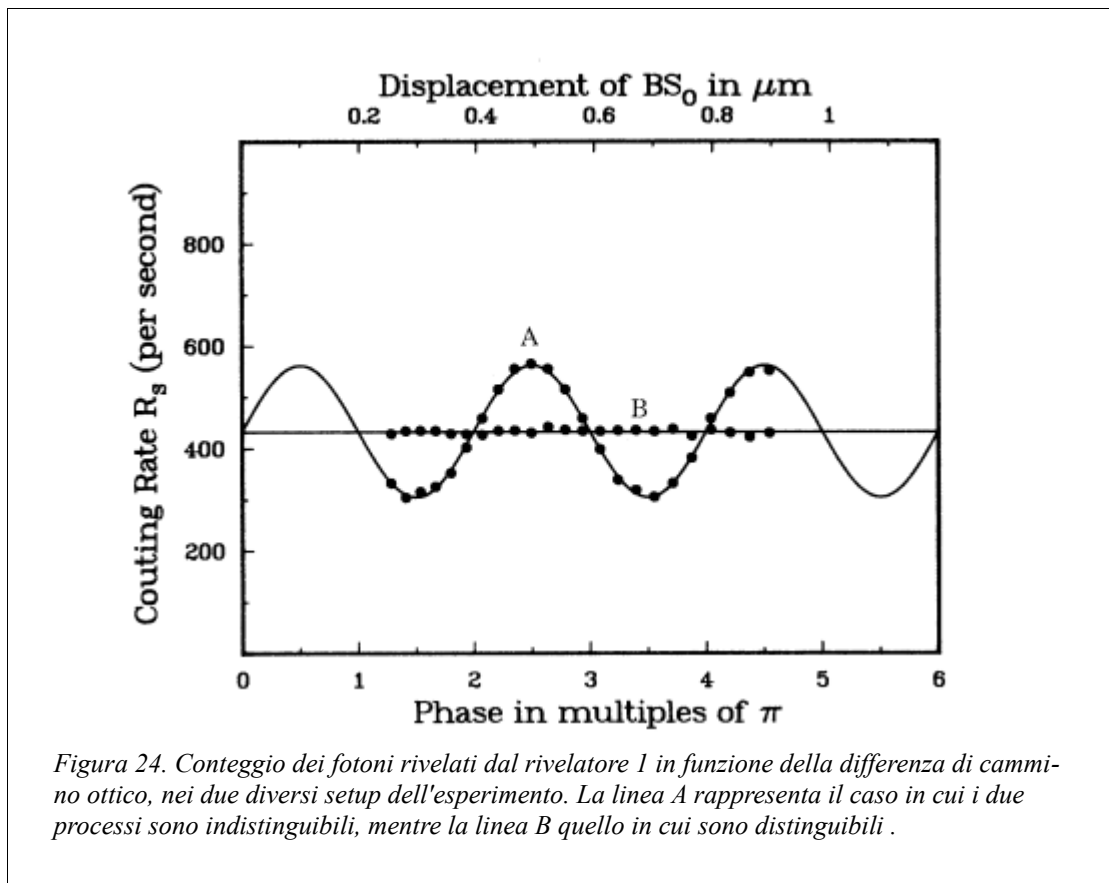


Figura 24. Conteggio dei fotoni rivelati dal rivelatore 1 in funzione della differenza di cammino ottico, nei due diversi setup dell'esperimento. La linea A rappresenta il caso in cui i due processi sono indistinguibili, mentre la linea B quello in cui sono distinguibili.

Questa è una delle fondamentali differenze con la meccanica classica: nella visione moderna della fisica quantistica, l'acquisizione di informazione su un sistema quantistico ne modifica l'evoluzione, restringendo i cammini possibili ai soli cammini compatibili con l'informazione ottenuta.

## 5.2. Processi, non solo cammini

Questo esperimento mostra anche perché il modello di Feynman viene chiamato “somma di storie”: ad interferire non sono i cammini, ma tutti i processi, tutte le storie, attraverso cui uno stato iniziale si trasforma in uno stato finale.

Infatti, nella prima configurazione dell'esperimento Zhou-Wang-Mandel esistono due processi, due possibili storie, che portano alla rivelazione del fotone al rivelatore 1. Poiché tali storie non sono distinguibili tra loro, esse interferiranno tramite la regola di Feynman della somma delle ampiezze.

Di contro, nella seconda configurazione, l'arrivo di un fotone al rivelatore 1 può ancora avvenire secondo due processi diversi, ma ora tali processi sono distinguibili poiché il secondo rivelatore ha comportamento diverso nei due processi. Per quanto quindi non sembra ci debba essere differenza nel comportamento del fotone “di segnale”, in realtà l'informazione che permette di distinguere tra di loro i due processi esiste, e questa esistenza impedisce l'interferenza tra di essi.

## 6. Quantizzazione

Iniziamo ora ad affrontare il problema della quantizzazione, partendo da un esercizio: un fotone di

energia  $E$  deve attraversare due beam splitter distanti tra di loro una distanza  $L$ . L'elettrone ha il 50% di probabilità di venire trasmesso o riflesso da ognuno dei beam splitter, mentre la sua ampiezza subisce uno sfasamento di  $\pi$  ogni volta che viene riflesso; è possibile calcolare la probabilità che superi i due beam splitter?

Chiamando i beam splitter A e B come in Figura 25, si possono individuare infiniti cammini attraverso cui il fotone può arrivare dalla sorgente al rivelatore: quello principale è Sorgente-A-B-Rivelatore; ma vi sono anche Sorgente-A-B-A-B-Rivelatore, Sorgente-A-B-A-B-A-B-Rivelatore, e in generale tutti quelli che si ottengono aggiungendo un numero arbitrario di giri completi B-A-B. La differenza di fase tra cammini successivi è quindi, contando la perdita di fase dovuta alle riflessioni,

$$\Delta \phi = 2kL - 2\pi \quad .$$

Siccome la probabilità di rivelare il fotone a ciascuna delle due uscite di un beam splitter è del 50% (0.5), i vettori ampiezza dei cammini trasmesso e riflesso vanno entrambi moltiplicati, dopo la trasmissione o la riflessione, per  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ , cioè il loro modulo si riduce. In precedenza abbiamo ignorato

questo fatto, perché i cammini che consideravamo subivano tutti lo stesso numero di trasmissioni e riflessioni, ma ora non è più così: sommiamo su cammini che hanno un diverso numero di riflessioni e trasmissioni, e quindi sommiamo vettori di lunghezza diversa. Questo rende difficile ottenere la probabilità di rivelazione con una formula, ma non impedisce di trovare quei valori dell'energia del fotone per cui la probabilità di trasmissione è massima. Infatti, la condizione di massimo è verificata se la differenza di fase tra due cammini successivi è un multiplo dell'angolo giro. Quindi si avrà tale condizione per:

$$\Delta \phi = 2kL - 2\pi = 2n\pi \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (26)$$

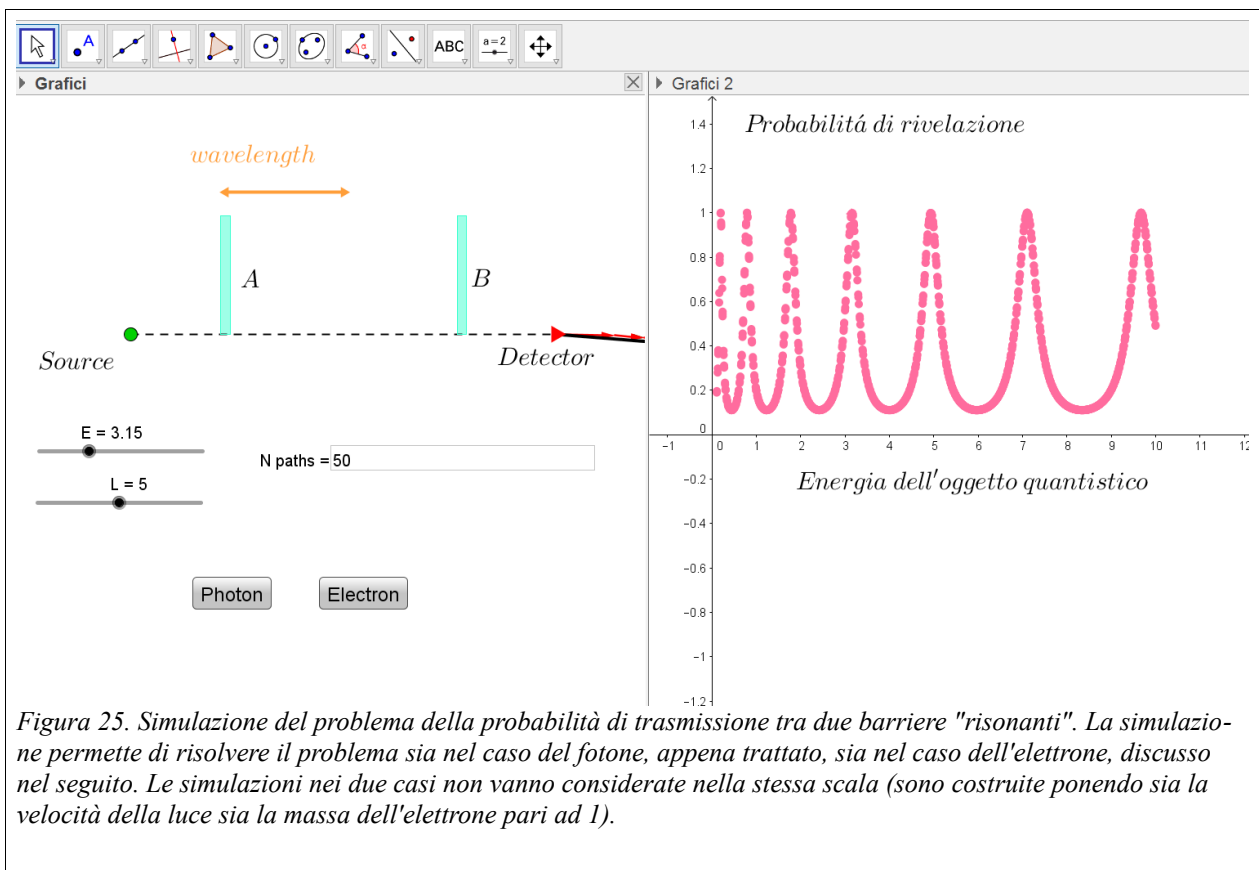
Poiché per il fotone

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi E}{hc} \quad (27)$$

Si trova, sostituendo la (27) nella (26):

$$E = (n+1) \frac{hc}{2L} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (28)$$

Esiste quindi un insieme discreto di valori dell'energia del fotone per cui la probabilità di trasmissione è massima. Anche in questo caso una simulazione realizzata con GeoGebra (Figura 25) può aiutare a visualizzare il problema proposto (disponibile al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/oiwrDPnR>).



Cosa cambia nel problema precedente se anziché un fotone prendiamo in considerazione un elettrone, e quindi sostituiamo i beam splitter con barriere di potenziale capaci di riflettere o trasmettere l'elettrone con una probabilità in entrambi i casi del 50%? Non molto, infatti il ragionamento resta analogo, così come continua a valere l'equazione (26) per la differenza di fase tra due cammini successivi. Cambia però la relazione tra il numero d'onda dell'elettrone e la sua energia, che diventa

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h} = \frac{2\pi\sqrt{2mE}}{h} \quad (29)$$

Dove  $m$  è la massa dell'elettrone. Sostituendo ora la (29) nella (27) si trova:

$$\frac{2L\sqrt{2mE}}{h} = (n+1) \rightarrow \frac{8mL^2E}{h^2} = (n+1)^2 \rightarrow E = (n+1)^2 \frac{h^2}{8mL^2} \quad (n=0,1,2,\dots) \quad (30)$$

Anche in questo caso la probabilità che l'elettrone oltrepassi le due barriere risulta massima in corrispondenza di ben determinate energie, dipendenti dalla distanza tra le barriere. La differenza tra la formula (28) e la (30) spiega la principale differenza che si riscontra nella simulazione di Figura 25 quando viene utilizzato un fotone oppure un elettrone: nel primo caso i picchi di trasmissione si ritrovano a valori di energia equispaziati (proporzionali ai numeri interi) mentre nel secondo caso tali valori non sono equispaziati (proporzionali ai quadrati dei numeri interi).

**Verso la quantizzazione:** due beam splitter o due barriere di potenziale semitrasparenti sono in grado di selezionare le energie degli oggetti quantistici (fotoni o particelle massive) che cercano di attraversarle. La probabilità di attraversamento è massima per alcune energie di risonanza, che dipendono dalla distanza tra le due barriere.

### 6.1. Elettrone in una “scatola”

Poniamoci invece nel caso di un elettrone confinato in una “scatola” unidimensionale di larghezza  $L$ , cioè in una buca di potenziale di altezza infinita, elettrone che non può quindi fuggire dalla regione di spazio in cui è intrappolato; denominiamo gli estremi della scatola con le lettere A e B (vedi Figura 26).

Si vuole valutare la probabilità che l'elettrone originariamente nella posizione S venga rivelato da un rivelatore posto in D. Come per i fotoni, i cammini da S a D che includono una riflessione su una parete della buca vedono la fase del fasore associato diminuire di  $\pi$ .

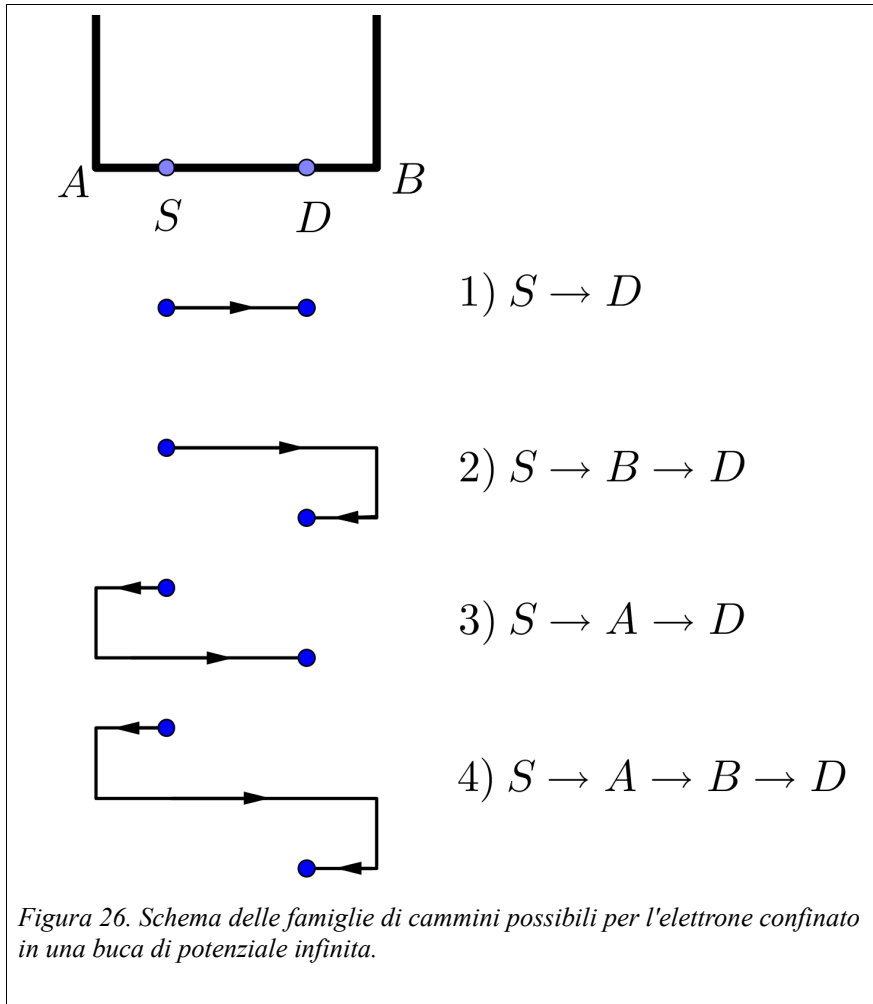
Anche in questo caso, abbiamo un'infinità di cammini possibili, riuniti questa volta in quattro famiglie. I quattro cammini possibili di base da S a D sono: quello diretto (cammino da S a D), riflessione dall'estremo B (cammino SBD), riflessione dall'estremo A (cammino SAD) e riflessione da entrambe le pareti, partendo verso sinistra (cammino SABD). Tutti gli altri cammini possibili si ottengono da questi quattro cammini di base, assumendo che l'elettrone prima di arrivare in R sia tornato nella posizione di partenza S con due riflessioni dalle pareti della scatola (partendo verso destra), quindi con una o più ripetizioni del cammino SBAD.

La fase dei vettori corrispondenti ai quattro cammini principali dipenderà dalla posizione di S ed R all'interno della barriera; ma la differenza di fase tra due cammini successivi della stessa famiglia no: sarà infatti

$$\Delta\phi = 2kL - 2\pi \quad (31)$$

Cioè identica a quella esaminata nell'esercizio precedente. Si può quindi ragionare in modo simile al problema della trasmissione da due barriere: i massimi di probabilità di rivelazione si avranno per quei valori dell'energia che rendono la differenza di fase tra due cammini successivi pari a un multiplo intero di  $2\pi$ . In definitiva, le energie per le quali la probabilità è massima saranno le stesse di quelle calcolate nell'equazione (30):

$$E = \frac{h^2(n+1)^2}{8mL^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (32)$$



In realtà, poiché i cammini da considerare sono infiniti, e i vettori ad essi associati hanno tutti lunghezza unitaria (l'elettrone non può uscire dalla scatola, quindi anche se riflessi i vettori non subiscono alcuna attenuazione), l'ampiezza risultante per i valori dell'energia dati dall'equazione (32) sarà infinita. Cosa succede se l'energia non ha uno dei valori dell'equazione (32)? In questo caso la differenza di fase tra due cammini successivi della stessa famiglia è un angolo fissato, non multiplo di  $2\pi$ . Facendo la somma di tali ampiezze, dopo un certo numero di cammini la somma si annullerà. Nel limite in cui gli infiniti cammini vengono considerati tutti, solo per le energie permesse dall'equazione (32) vi sarà una probabilità di rivelare l'elettrone; per tutti gli altri valori, l'ampiezza, e quindi la probabilità, sarà nulla.

Ancora una volta una simulazione può aiutare a chiarire quanto abbiamo affermato (Figura 27 e link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/Bo5umtnk>). In essa si possono osservare dei "picchi" molto definiti per la probabilità di rivelazione, corrispondenti ai valori permessi dell'energia. Si può inoltre vedere che, per tutti gli altri valori, i vettori corrispondenti ai vari cammini si sommano distruttivamente e l'ampiezza risultante è molto piccola. La simulazione prende in considerazione solo 15 cammini per ciascuna famiglia, ma aumentando tale numero le righe si fanno sempre più nette, cioè la probabilità tende a diventare diversa da zero solo in corrispondenza ai valori di energia dati

dalla (32).

Un oggetto quantistico confinato in uno spazio finito può avere perciò solo valori discreti dell'energia; e se in laboratorio si ha a disposizione un sistema simile, e si misura la sua energia, si potrà ottenere come risultato solo uno di tali valori. Noi abbiamo calcolato il livelli di energia ammessi per la "scatola", cioè la buca di potenziale rettangolare infinita. Un oggetto quantistico potrebbe essere confinato da un potenziale di altro tipo, ad esempio di forma parabolica (come se fosse attirato verso un punto da una forza di tipo elastico). In questi casi i valori ammessi dell'energia saranno diversi, ma rimarrà la conclusione generale che solo un insieme discreto di valori dell'energia saranno ammessi.

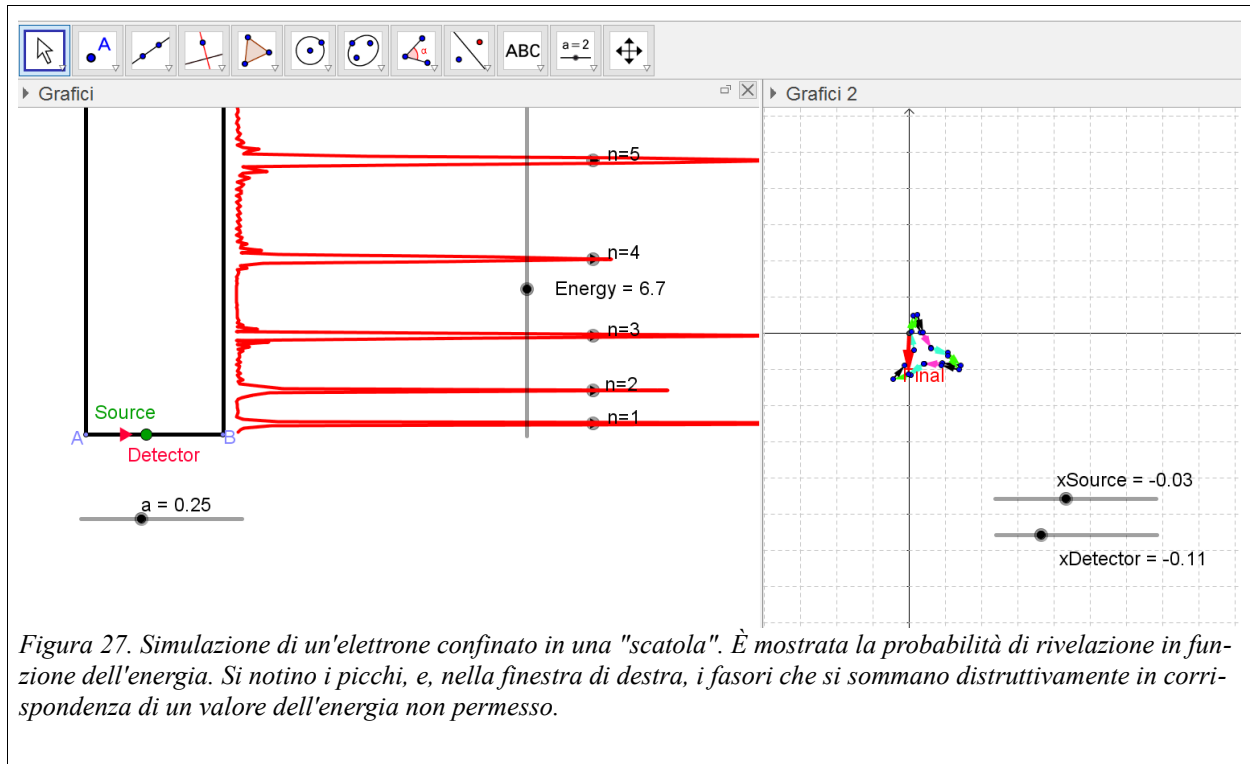


Figura 27. Simulazione di un'elettrone confinato in una "scatola". È mostrata la probabilità di rivelazione in funzione dell'energia. Si notino i picchi, e, nella finestra di destra, i fasori che si sommano distruttivamente in corrispondenza di un valore dell'energia non permesso.

**Quantizzazione:** un elettrone confinato in una regione di spazio lunga  $L$  ammette solo alcuni valori discreti dell'energia come possibili, dipendenti dalla lunghezza. L'energia risulta quantizzata

## 6.2. L'energia nulla non è ammessa

Esaminando la formula (32) per le energie ammesse, notiamo che l'energia nulla non è ammessa, poiché l'indice  $n$  deve essere maggiore od uguale a zero. Questo è un risultato molto importante, che si può anche far risalire al principio di indeterminazione: se l'elettrone è confinato in uno spazio  $L$ , allora l'incertezza sulla posizione può essere assunta come pari a  $L/2$ . Per il principio di indeterminazione tra posizione e quantità di moto (equazione (22)):

$$\Delta p \geq \frac{h}{4\pi \Delta x} = \frac{h}{2L\pi} \quad (33)$$

D'altronde, abbiamo che  $E = \frac{p^2}{2m}$ , quindi la media dell'energia sarà pari a:

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \quad (34)$$

Applicando la formula statistica secondo la quale la media del quadrato di una variabile aleatoria è pari al quadrato della media più lo scarto quadratico medio

$$\langle p^2 \rangle = \langle p \rangle^2 + (\Delta p)^2 \quad (35)$$

e tenendo conto che il valor medio della quantità di moto è nullo,  $\langle p \rangle = 0$

$$\langle E \rangle = \frac{\langle \Delta p \rangle^2}{2m} \geq \frac{h^2}{8\pi^2 m L^2} \quad (36)$$

si ha che l'energia cinetica media dell'oggetto quantistico non può essere zero.

Il valore minimo dell'energia derivato tramite il principio di indeterminazione non corrisponde esattamente al valore minimo dell'energia dato dall'equazione (32) ma ne fornisce soltanto una stima approssimativa. In generale, per ogni potenziale usando il principio di indeterminazione si può dare una stima ragionevole della minima energia possibile per quel potenziale, detta anche “energia dello stato fondamentale”.

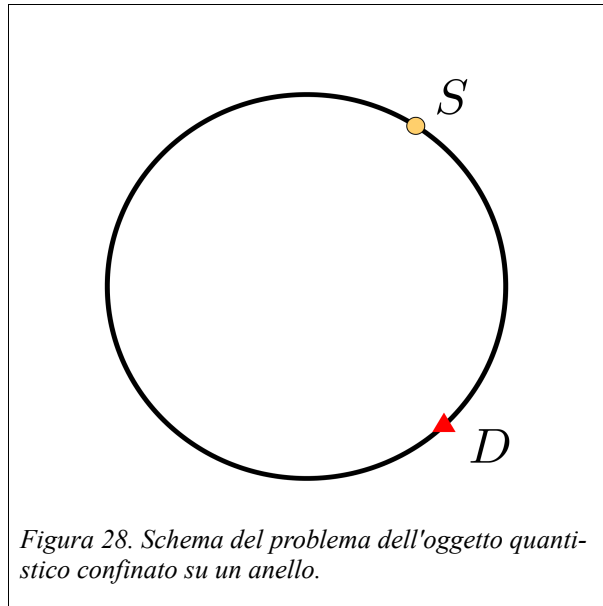
**L'energia nulla non è ammessa:** l'elettrone (o qualunque oggetto quantistico) confinato in una “scatola” non ammette l'energia nulla tra le energie possibili, ma deve avere un'energia minima non nulla. Il principio di indeterminazione nega la possibilità che un oggetto quantistico rimanga fermo in una regione di spazio ben delimitata, e questo comporta che la sua energia non possa esser nulla.

### 6.3. Quantizzazione del momento angolare

Se si confina un elettrone su un anello circolare (Figura 28), si ottiene una situazione molto simile a quella appena esaminata della scatola, con alcune differenze.

Innanzitutto, nella scatola non è possibile distinguere i cammini che procedono verso sinistra da quelli orientati verso destra, perché la riflessione dalle pareti cambia il verso del moto. Di contro, un anello non ha riflessioni, e ciò rende i cammini con verso orario distinguibili da quelli con verso antiorario; quindi possiamo limitarci ad esaminare uno solo dei due casi.





I cammini possibili per un determinato senso di rotazione si ottengono dal cammino diretto da S a D aggiungendo rotazioni complete nel verso desiderato. La differenza di fase tra cammini successivi diventa quindi  $\Delta\phi = 2\pi r k$ . Si noti come l'assenza di riflessioni rimuove il termine sottrattivo  $2\pi$ . Anche in questo caso affinché la probabilità finale non sia nulla i vettori corrispondenti a due cammini che differiscono di un giro completo devono essere paralleli, quindi la differenza di fase deve essere un multiplo intero di  $2\pi$ . Da questa condizione si ottiene, ricordando ancora una volta che  $k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi p}{h}$ :

$$\Delta\phi = 2\pi r k = 2\pi r 2\pi \frac{p}{h} = 2n\pi$$

$$2\pi r \frac{p}{h} = n \quad (37)$$

E quindi, indicando con  $L$  il momento angolare dell'elettrone,

$$L = p r = n \frac{h}{2\pi} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (38)$$

Si può immediatamente notare come  $L$  risulti quantizzato, e non dipenda dal raggio dell'anello. Il momento angolare non può quindi assumere valori arbitrari, ma solo multipli interi (compreso lo zero) di una unità di momento angolare fondamentale  $\frac{h}{2\pi}$ ; questo risultato, ottenuto per un oggetto quantistico confinato in un anello circolare, è applicabile a tutti i moti di rotazione, anche diversi da quello circolare.

Anche l'energia risulta quantizzata, ma i valori non sono indipendenti dal raggio dell'anello. In particolare,

$$E = \frac{p^2}{2m} = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{n^2}{4mr^2} \quad (n \in \mathbb{N}) \quad (39)$$

In questo caso, il valore  $n=0$  è ammesso. Quindi nel caso molto particolare del confinamento su un anello, è possibile che l'oggetto quantistico abbia energia nulla.

**Quantizzazione del momento angolare:** come per il caso dell'energia di una particella confinata in una scatola, anche il momento angolare risulta quantizzato, potendo assumere solo valori che risultino essere multipli interi di  $h/2\pi$ . Questi valori non dipendono dalla geometria del sistema.

## 7. Atomo di Bohr

Quello che viene chiamato “atomo di Bohr” è un modello atomico, proposto da Bohr nel 1913 per tentare di descrivere l'atomo di idrogeno.

Come si può notare dalla data, ci si trova proprio agli albori della teoria quantistica; questo modello è molto importante dal punto di vista storico perché indicò alla comunità scientifica una buona strada per poter spiegare i comportamenti subatomici che in quel periodo venivano osservati per la prima volta, ma è un modello ibrido, che non può essere considerato quantistico se misurato con canoni moderni; è definito infatti un modello “semiclassico”, poiché usa la meccanica classica e vi aggiunge *ad hoc* alcune ipotesi quantistiche. La bontà di alcuni dei risultati ottenuti, però, indicò ai fisici come le ipotesi introdotte da Bohr fossero punti importanti su cui concentrare le ricerche.

Il modello atomico di Bohr tratta gli elettroni come se fossero particelle classiche e non quanti, e utilizza ancora l'idea di traiettoria; d'altronde, ancora non si era capito quanto fosse differente il comportamento delle particelle subatomiche da quello degli oggetti macroscopici, ed è quindi naturale che Bohr continuasse ad utilizzare la meccanica classica per descrivere l'elettrone.

Innanzitutto, scriviamo le equazioni *classiche* per un elettrone in orbita circolare attorno ad un protone:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{mv^2}{r} = \frac{k_c e^2}{r^2} \\ E = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{k_c e^2}{r} \end{array} \right. \quad (40)$$

La prima equazione afferma che la forza centripeta è pari alla forza di Coulomb di attrazione elettrostatica, mentre la seconda è semplicemente la formulazione dell'energia meccanica totale come energia cinetica più energia potenziale. Il simbolo  $k_c$  è la costante Coulomb, nel sistema internazionale più comunemente scritto come  $k_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ , mentre  $m$  è la massa dell'elettrone.

Dalla prima delle (40) si può ricavare immediatamente che, in un'orbita legata per attrazione elettrostatica, l'energia cinetica è metà del modulo dell'energia potenziale, quindi

$$E_{cin} = -\frac{E_{pot}}{2} = \frac{k_c e^2}{2r} \quad (41)$$

$$E = -\frac{k_c e^2}{2r}$$

Bohr fece l'assunzione che il momento angolare fosse quantizzato allo stesso modo di come abbiamo mostrato per un oggetto confinato su un anello nella sezione 6.3., cioè che potesse assumere solo valori pari a multipli interi di  $\frac{h}{2\pi}$  come dalla formula (38).

A partire da questa ipotesi, si ottiene:

$$E_{cin} = \frac{L^2}{2mr^2} = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{n^2}{2mr^2} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (42)$$

$$E = -\frac{L^2}{2mr^2} = -E_{cin}$$

Uguagliando la prima delle (42) con la prima delle (41) si ottengono i valori possibili per i raggi dell'orbita:

$$\frac{k_c e^2}{2r} = \frac{h^2}{4\pi^2} \frac{n^2}{2mr^2} \rightarrow r = n^2 \frac{h^2}{4\pi^2 k_c m e^2} \quad (43)$$

E sostituendo i raggi permessi dalla (43) nella seconda delle (41) si possono ottenere i valori permessi per l'energia totale dell'elettrone:

$$E = -\frac{2mk_c^2 e^4 \pi^2}{n^2 h^2} \quad (n=1,2,3,\dots) \quad (44)$$

Con la sua ipotesi, Bohr ottiene due risultati numerici interessanti: innanzitutto, l'energia dello stato fondamentale ( $n = 1$ ) risulta uguale in modulo all'energia di ionizzazione dell'idrogeno.

In secondo luogo, questo modello è il primo che riesce a dare una spiegazione al fenomeno delle righe spettrali: ogni elemento assorbe ed emette luce a ben definite frequenze, generando uno spettro di assorbimento od emissione a righe, da cui il nome righe spettrali.

Nella transizione da un'energia ammessa ad un'altra, l'elettrone deve assorbire od emettere energia, solitamente sotto la forma di fotoni. L'energia assorbita o emessa sarà pari alla differenza tra le energie dei due livelli coinvolti nella transizione. Le energie permesse per l'elettrone calcolate da Bohr risultano essere proprio quelle che, considerando la differenza tra due diversi valori permessi, danno luogo alle varie serie di righe nello spettro dell'idrogeno. Inoltre, Bohr riesce a calcolare per via teorica il valore della costante di Rydberg, una costante che descrive la posizione di tali righe, trovando un valore in accordo con i risultati sperimentali.

Si noti come l'ipotesi introdotta da Bohr come assunzione *ad hoc* (la quantizzazione del momento angolare) è un risultato che la meccanica quantistica riesce a ricavare. Questo non è un caso: poiché il modello di Bohr serviva di interpretare correttamente i risultati sperimentali, la teoria quantistica, costruita successivamente, doveva essere in grado di spiegare in modo coerente le ipotesi sulle quali quel modello si fondava.

## 7.1. Limiti del modello di Bohr

È molto importante sottolineare i forti limiti del modello appena esposto. In esso, l'elettrone non percorre tutti i cammini possibili, compatibili con i vincoli imposti al sistema; ma è arbitrariamente vincolato a stare su una circonferenza, corrispondente ad una delle orbite classiche.

Il modello, fondamentalmente, è una mescolanza tra principi della meccanica classica ed elementi di meccanica quantistica, che ben rispecchia la situazione di transizione vissuta dalla comunità fisica del periodo. Il modello di Bohr ottiene quindi alcuni risultati corretti, ma non rispecchia assolutamente la teoria moderna. È estremamente importante dal punto di vista storico perché per la prima volta viene introdotta la discretizzazione di variabili ritenute continue: la quantizzazione dell'energia entrò nel discorso fisico proprio grazie a questo modello.

Un modello puramente quantistico degli atomi presenta alcune somiglianze e notevoli differenze con il modello di Bohr. Si ritrova la quantizzazione dell'energia, con solo alcune energie ammesse, ed i valori calcolati da Bohr per l'energia dei vari livelli dell'atomo di idrogeno risultano corretti.

D'altronde, in meccanica quantistica non si può parlare di orbite, ed invece si introduce il concetto di orbitale, cioè la distribuzione di ampiezze e probabilità dell'elettrone per un dato livello energetico: l'elettrone ha una probabilità di essere rilevato in una data posizione, ma non si può mai essere certi della sua posizione ed esso si può sempre trovare a distanze dal nucleo diverse dai raggi delle orbite di Bohr. Nel linguaggio dei cammini di Feynman, si scopre che in corrispondenza di ognuno dei valori permessi dell'energia, i cammini che soddisfano alla condizione di interferenza costruttiva sono quelli confinati a percorrere una certa regione di spazio intorno al nucleo, che è quella corrispondente ad uno degli orbitali.

I valori dei raggi trovati da Bohr continuano però ad avere significato anche passando agli orbitali: prendendo per esempio il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno, la distanza dell'elettrone dal nucleo calcolata secondo il modello di Bohr, chiamata comunemente "raggio classico dell'atomo di idrogeno", risulta essere nel modello quantistico la distanza alla quale la probabilità di trovare l'elettrone è massima.

Si noti però che moda e media non sono necessariamente coincidenti. Sempre esaminando il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno, la distanza media dell'elettrone risulta circa una volta e mezza superiore alla distanza di probabilità massima: l'atomo di idrogeno ha circa una volta e mezzo il raggio ottenuto con i calcoli di Bohr.

## 8. Interferenza tra processi con più particelle\*

Fino ad ora, si è sempre studiato il comportamento di un singolo oggetto quantistico, per il quale le varie storie possibili interferiscono tra di loro. Questo differenzia ciò che accade in meccanica quantistica dall'interferenza tra onde classiche, ove gli effetti di interferenza nascono dall'interazione tra fronti d'onda diversi.

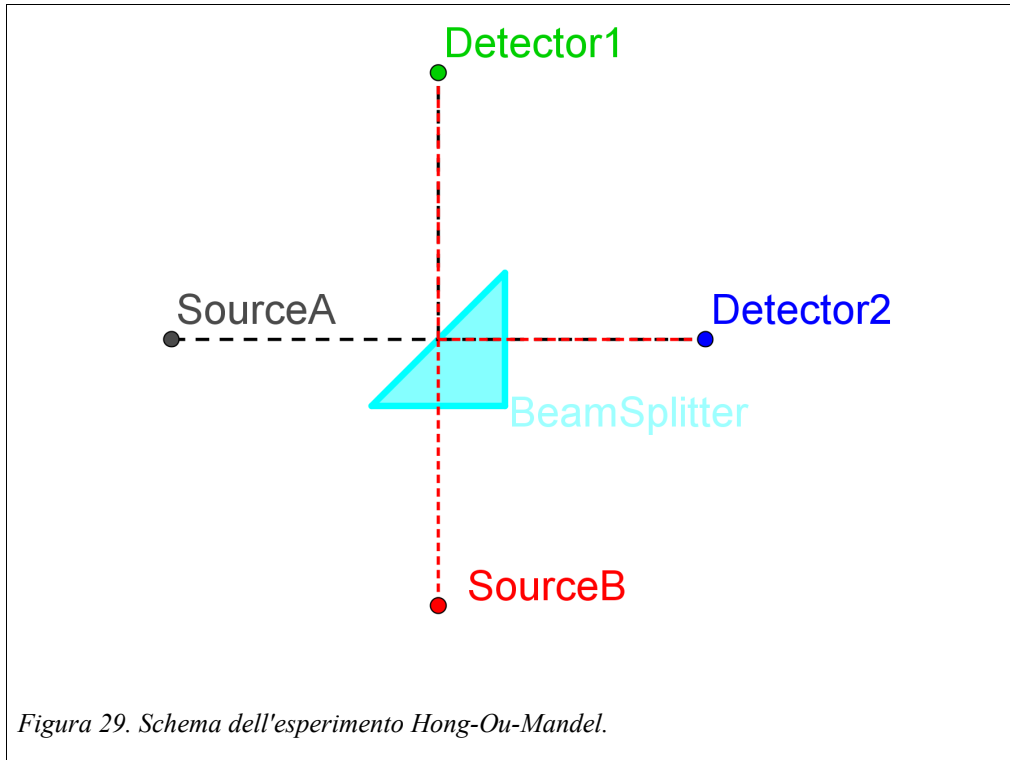
La domanda nasce quindi spontanea: esistono fenomeni di interferenza in cui sono coinvolte più particelle, ed in caso affermativo come possono essere spiegati?

### 8.1. Esperimento Hong, Ou, Mandel\*

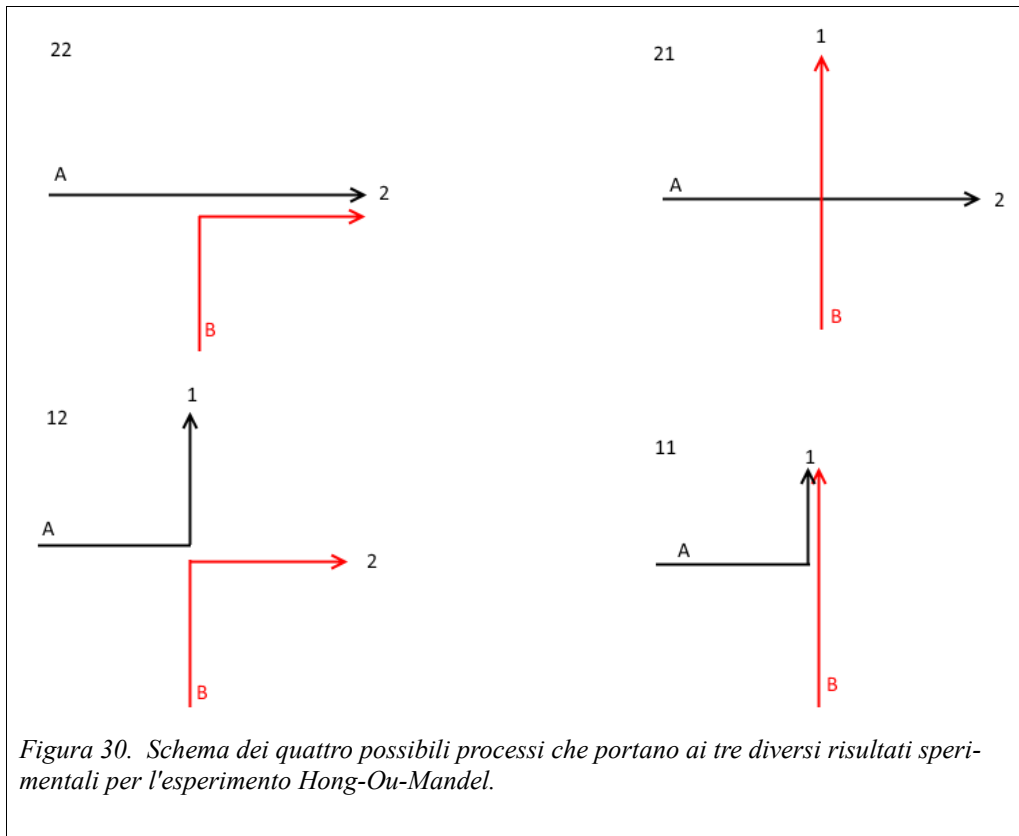
La fisica quantistica prevede effetti di interferenza in cui sono coinvolte più particelle, ed in un famoso esperimento del 1986 (Hong, C. K.; Ou, Z. Y. & Mandel, L. (1987). "Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference". Phys. Rev. Lett. 59 (18): 2044-2046) questo effetto viene osservato in maniera diretta.

L'università di Erlangen-Norimberga fornisce, sempre all'indirizzo <http://www.didaktik.physik.uni-erlangen.de/quantumlab/english/>, anche questo esperimento, alla voce "Hong-Ou-Mandel".

Lo schema alla base dell'esperimento è facile da descrivere: due fotoni indistinguibili (cioè posti nello stesso identico stato) vengono diretti nelle due entrate di un beam-splitter e due rivelatori sono posti alle due uscite, come in Figura 29.



Ci si chiede, qual è la probabilità di rivelare i fotoni ai due rivelatori? Ci sono, in linea di principio, quattro possibili processi, che possono portare a tre diversi risultati sperimentali (Figura 30): il fotone A può andare al rivelatore 1 od al rivelatore 2, ed analogamente il fotone B. Sperimentalmente, assunto come al solito che l'efficienza dei rivelatori sia del 100%, potrò trovare due fotoni al rivelatore 1, due al rivelatore 2, oppure uno al rivelatore 1 ed uno al rivelatore 2. I due processi indicati in Figura 30 come “12” e “21” sono perciò sperimentalmente indistinguibili, se lo sono i due fotoni che vi prendono parte.



L'aspettativa "ingenua" è che i fotoni non interferiscano, e quindi ognuna delle possibilità ha il 25% di probabilità di avvenire; metà delle volte un rivelatore segnalerà entrambi i fotoni e metà delle volte entrambi i rivelatori segnaleranno un fotone ognuno. In questo secondo caso, si parla di "coincidenza" tra i rivelatori.

Questo è quello che effettivamente si osserva se i fotoni inviati all'apparato risultano in qualche maniera distinguibili, per lunghezza d'onda o per polarizzazione o soprattutto se i due fotoni entrano nel beam splitter con tempi diversi anche di poco.

In questo caso, infatti, i diagrammi "12" ( $A \rightarrow 1$ ,  $B \rightarrow 2$ ) e "21" ( $A \rightarrow 2$ ,  $B \rightarrow 1$ ) sono facilmente distinguibili sperimentalmente e quindi non possono interferire.

Se invece si rendono i due fotoni in entrata veramente *indistinguibili*, l'interferenza diventa in linea di principio possibile, e viene effettivamente osservata.

Nell'apparato utilizzato da Hong-Ou-Mandel, la posizione del beam-splitter può venire variata in maniera da modificare i tempi di entrata dei due fotoni, e quando i tempi di arrivo dei fotoni si avvicinano si inizia a notare un peculiare effetto di interferenza: la probabilità che i due fotoni vadano in due rivelatori diversi diventa minore del 50% diminuendo man mano che il tempo di arrivo dei due fotoni tende a coincidere; i due rivelatori però continueranno ognuno a rivelare la metà dei fotoni emessi.

Il singolo fotone, quindi, ha un comportamento apparentemente inalterato, poiché continua a scegliere le due uscite del beam-splitter con probabilità del 50% ognuna; è il comportamento della coppia di fotoni che cambia, ed i fotoni tendono a "raggrupparsi" ed ad uscire dalla stessa uscita, riducendo invece l'apparire delle coincidenze tra i rivelatori, fino ad un minimo nullo per fotoni completamente indistinguibili.

## 8.2. Ampiezza di una storia composta\*

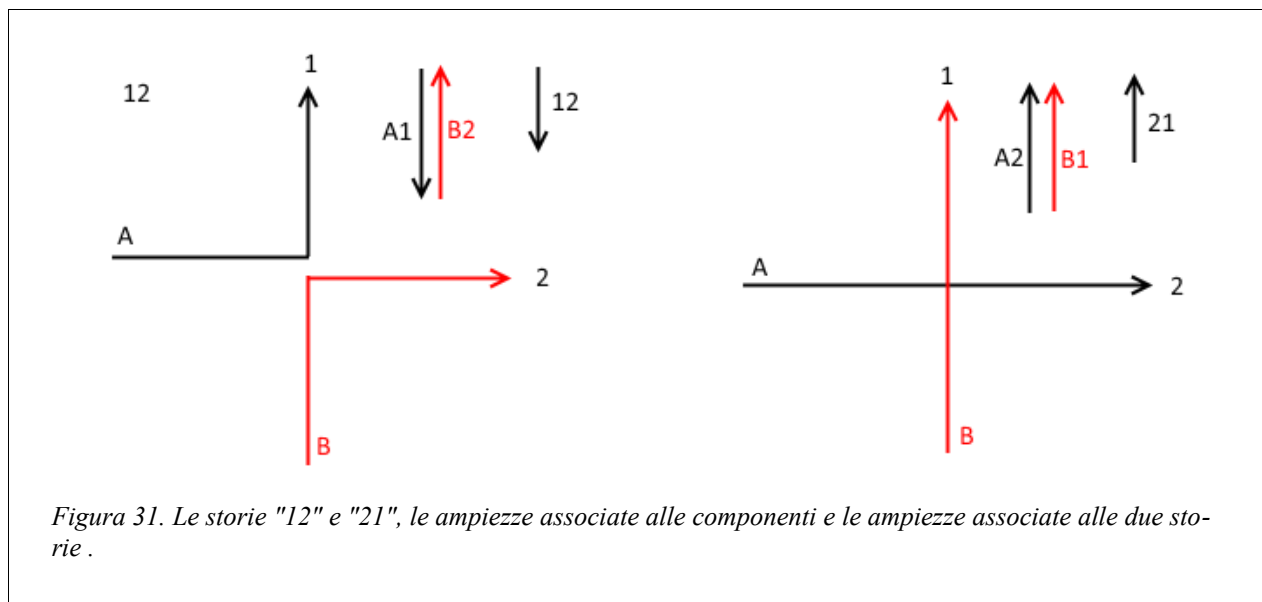
Già con l'esperimento Zhou-Wang-Mandel (sezione 5.1.) si era detto che ad interferire non erano i cammini, ma le storie o i processi indistinguibili con cui il sistema poteva passare da un dato stato iniziale ad un dato stato finale.

Si riveda la Figura 30, che descrive le quattro combinazioni possibili per l'esperimento di Hong-Ou-Mandel. Le combinazioni "22" ed "11" corrispondono a stati finali diversi e non interferiscono con altri, mentre se i fotoni sono indistinguibili le combinazioni "21" ed "12" corrispondono allo stesso stato finale: si ha un fotone al rivelatore 1 ed un fotone al rivelatore 2. Le combinazioni "21" ed "12" descrivono quindi *due diverse storie per ottenere la stessa transizione* dallo stato "due fotoni in ingresso" allo stato "un fotone in ogni rivelatore".

Perciò, le storie associate a questa transizione interferiscono tra di loro, in maniera distruttiva come indica l'evidenza sperimentale.

Si vuole costruire quindi il fasore che rappresenta l'ampiezza di una storia composta, cioè una storia a cui contribuiscono più particelle. Per fare ciò si devono prima calcolare le ampiezze associate alle singole particelle che compongono il sistema, tramite la somma di cammini già descritta; fatto questo, il fasore associato a tutta la storia è il vettore la cui intensità è pari al **prodotto** delle intensità di tutte le ampiezze associate alle particelle componenti e la cui fase è pari alla **somma** delle fasi.

Questa operazione ha tutte le proprietà comunemente associate al prodotto (commutativa, associativa, distributiva rispetto all'addizione) per cui viene chiamata prodotto e indicata con i simboli comunemente associati al prodotto. I vettori bidimensionali come i fasori e le ampiezze possono essere rappresentati usando numeri complessi, in questo caso questa operazione coincide con il prodotto nei complessi.



Si calcolino ora le ampiezze delle due storie "12" e "21": nella prima storia, è presente una riflessione esterna del fotone A che va in 1, mentre nella seconda storia si hanno solo trasmissioni. La fase dell'ampiezza associata alla prima storia è quindi maggiore di  $\pi$  rispetto alla fase associata alla seconda storia, e l'ampiezza totale sarà nulla poiché i fasori sono in opposizione di fase.

Questo effetto non dipende dalle proprietà del particolare beam-splitter in esame (non tutti i beam splitter sono costruiti come quelli di Figura 5 o Figura 16, e beam splitter di tipo diverso hanno una

diversa relazione nello sfasamento tra i fotoni riflessi ai due ingressi): ma si può dimostrare che il comportamento del fotone risulta identico utilizzando qualsiasi tipo di beam-splitter con 50% di probabilità di riflessione e 50% di trasmissione.

### **8.3. Bosoni, fermioni e regole di scambio\***

Eseguendo esperimenti analoghi a questo, si osserva però che mentre alcune particelle si comportano come i fotoni, altre particelle come gli elettroni si comportano in maniera opposta: in un apparato analogo a quello Hong-Ou-Mandel, gli elettroni tendono a separarsi, aumentando il conteggio delle coincidenze fino a che esse costituiscono la totalità delle coppie inviate all'apparato in situazione di totale indistinguibilità. Vedasi ad esempio Quantum interference in Electron Collision. R.C.Liu, B Odom, Y. Yamamoto, S Tarucha. s.l. : Nature, 1998, Vol. Vol 391.

Si osserva quindi che esistono due classi di particelle, quelle che presentano effetti analoghi ai fotoni e quelle che invece si comportano come gli elettroni; queste due classi vengono chiamate rispettivamente bosoni e fermioni.

Per gli elettroni, ed i fermioni in generale, si deve usare quella che i fisici chiamano una “regola di scambio” diversa: se due storie differiscono solo per lo scambio di due elettroni, le ampiezze delle due storie non vanno sommate, ma sottratte. In altre parole, se due storie differiscono tra di loro per uno scambio di fermioni indistinguibili, i fasori associati vanno sottratti e non sommati. Analogamente, in presenza di tre o più storie, fissata arbitrariamente una storia di riferimento si sottraggono tutti i fasori associati a storie con un numero dispari di scambi di fermioni indistinguibili, e si sommano quelle con un numero pari di scambi di fermioni.

La regola di scambio per i bosoni è invece più semplice: se due storie differiscono per uno (o più) scambi di bosoni indistinguibili, i fasori associati vanno sempre sommati tra di loro.

Queste due diverse regole di scambio portano ai diversi comportamenti tra bosoni e fermioni, per cui i primi tendono a raggrupparsi ed i secondi tendono a separarsi.

### **8.4. Principio di esclusione di Pauli\***

Il diverso comportamento dei bosoni e dei fermioni, per cui in determinate condizioni i primi tendono a raggrupparsi mentre i secondi tendono a separarsi, spiega un fenomeno sorto durante l'esame delle proprietà dell'atomo. Risulta infatti che al massimo una coppia di elettroni può trovarsi ad occupare lo stesso livello energetico di un atomo, o meglio lo stesso orbitale (esistono orbitali con eguale valore energetico ma caratterizzati da diversi valori del momento angolare); questo fenomeno, chiamato “principio di esclusione di Pauli”, è una conseguenza diretta della tendenza dei fermioni a separarsi.

Due elettroni (o due fermioni) indistinguibili non possono occupare simultaneamente lo stesso stato, cioè non possono avere simultaneamente gli stessi valori per tutte le proprietà che li caratterizzano.

Esiste però una proprietà intrinseca degli elettroni che ne permette la distinzione; ogni particella è caratterizzata infatti da un valore chiamato “*spin*”, che nel caso dell'elettrone può assumere solo due

valori:  $\frac{h}{2\pi}$  e  $-\frac{h}{2\pi}$ . Al massimo due elettroni possono quindi trovarsi nello stesso stato, fintantoché una differenza nel loro valore di spin li renda distinguibili.

## **9. Il principio di corrispondenza (limite classico)**

Un principio base di coerenza delle teorie fisiche richiede che, se si introduce una nuova teoria in sostituzione di una precedentemente accettata, per spiegare nuovi fenomeni che quella precedente

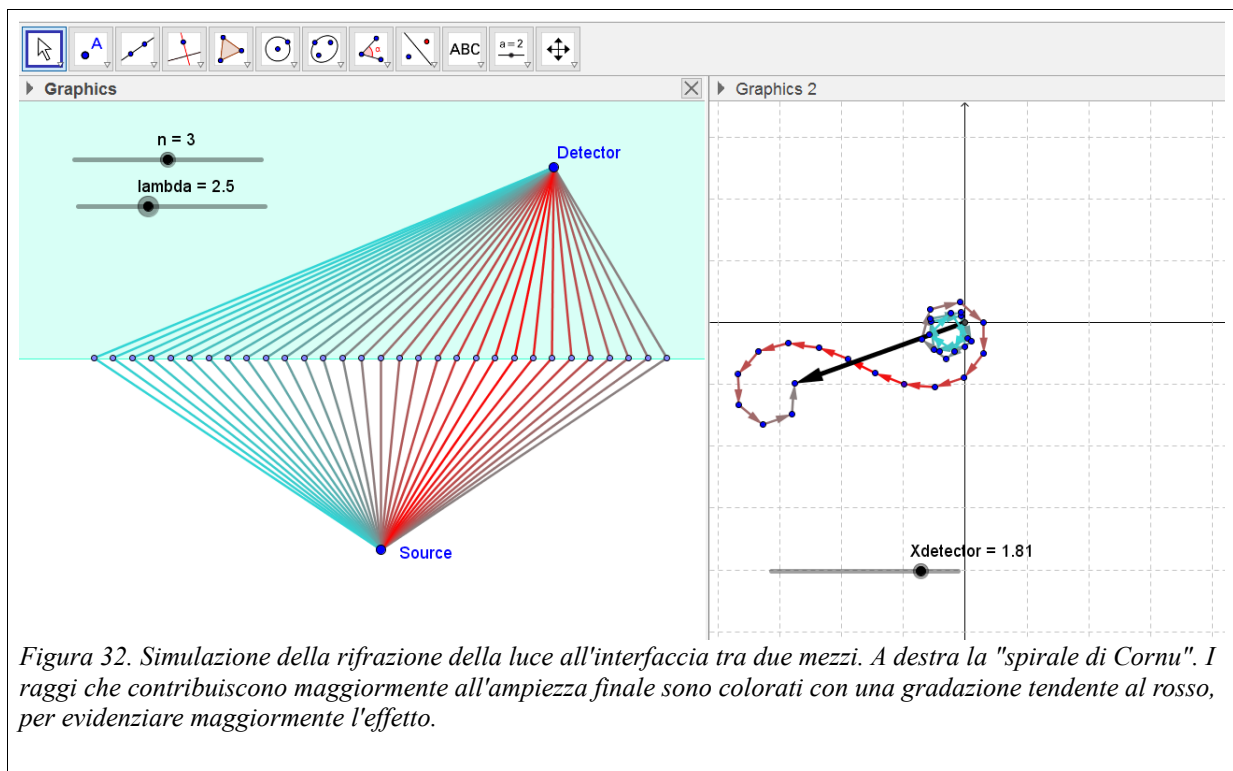


era incapace di spiegare, la nuova teoria deve spiegare *anche* tutto quello che la teoria precedente era già in grado di spiegare, o ancora meglio si deve riuscire a mostrare che, in qualche limite o facendo qualche approssimazione, dalla nuova teoria si ricostruisce la vecchia.

Detto in termini più espliciti, all'interno della fisica quantistica si deve riuscire a spiegare perché, se tale teoria è quella fondamentale, il mondo macroscopico segua così bene le leggi della meccanica classica, che si sono rivelate errate. Non è accettabile, per le richieste di coerenza degli scienziati, che si dica semplicemente “gli oggetti microscopici seguono la meccanica quantistica, quelli macroscopici quella classica” senza spiegare come e perché questo “taglio” avvenga.

Si pone quindi il problema di spiegare come, dalla teoria quantistica in cui gli oggetti seguono tutti i cammini possibili, possa emergere per oggetti macroscopici quella classica, in cui le particelle percorrono traiettorie ben definite ed univoche. Per capire questo, possiamo affidarci ancora una volta a simulazioni di semplici fenomeni, che ci mostrino almeno qualitativamente la strada da seguire per fornire una spiegazione.

Osserviamo per prima cosa la simulazione della rifrazione di un fotone all'interfaccia tra due mezzi materiali, disponibile online al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/flqFrFTa>. Nella finestra di destra è mostrata, come al solito, la somma dei fasori corrispondenti ai vari cammini, che assume la caratteristica forma detta “spirale di Cornu”. Manipolando la simulazione, possiamo notare che, riducendo la lunghezza d'onda del fotone, il numero di cammini che si “arricciano” alle estremità della spirale aumenta, mentre il numero di cammini che ne formano il tratto centrale, che dà il contributo principale all'ampiezza finale, diminuisce. Tali cammini sono quelli vicini al “raggio” dell'ottica geometrica che unisce la sorgente al rivelatore, ossia quello determinato dalla legge di Snell. Si può mostrare che, in effetti, danno un contributo apprezzabile all'ampiezza finale solo quei cammini la cui lunghezza differisce da quella del “raggio” dell'ottica geometrica di meno di una lunghezza d'onda.



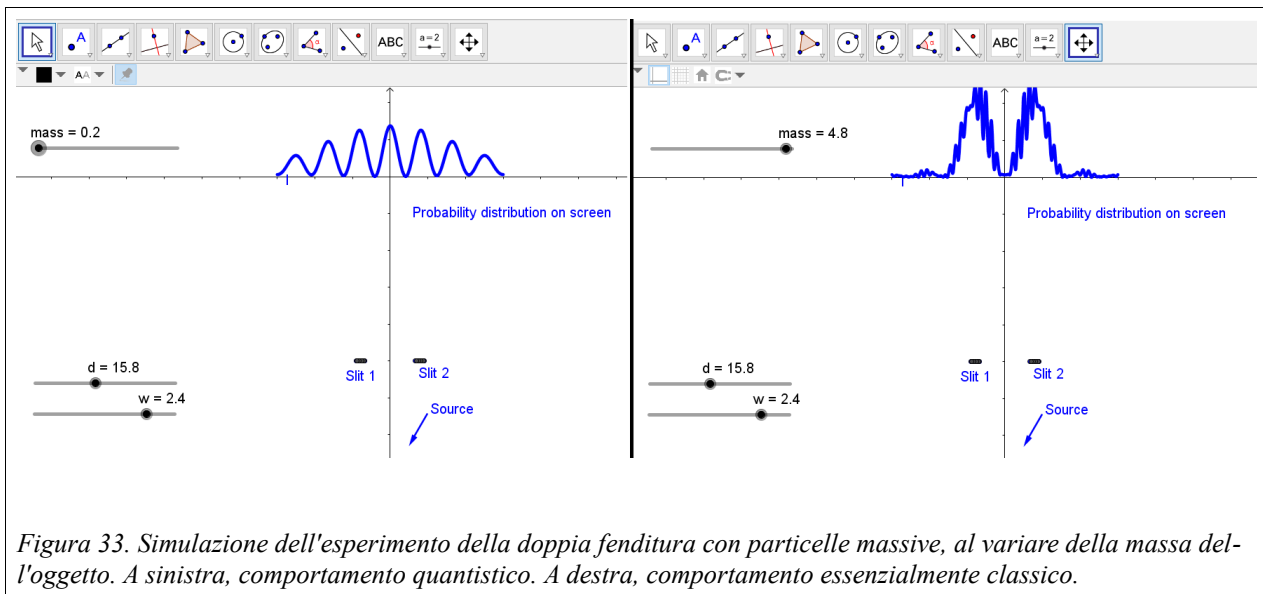
Andando al limite di questo processo, si può immaginare che, quando la lunghezza d'onda del foto-

ne diventa infinitesimamente piccola rispetto alle altre scale di lunghezza caratteristiche del problema (in questo caso, la distanza sorgente-rivelatore) essenzialmente un solo cammino contribuirà all'ampiezza finale: il raggio dell'ottica geometrica.

Ecco che si è mostrato come, in un certo limite (quello di lunghezze d'onda molto piccole rispetto alla scala di lunghezza del sistema) la fisica quantistica del fotone riproduce i risultati di una teoria studiata in precedenza: l'ottica geometrica. Un'altra simulazione che può essere interessante osservare in questa prospettiva è ad esempio quella che riguarda lo specchio parabolico, al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/g5eJrRir>.

E per le particelle massive? La spiegazione è analoga: al diminuire della lunghezza d'onda (di De Broglie) dell'oggetto quantistico rispetto alle dimensioni caratteristiche del sistema considerato, sempre meno cammini contribuiscono significativamente all'ampiezza finale, e quelli che lo fanno sono quelli molto vicini alla traiettoria classica. Nel limite in cui la lunghezza d'onda di De Broglie diventa infinitamente piccola essenzialmente solo la traiettoria classica contribuisce.

Può ancora aiutarci un'ultima volta una simulazione: quella dell'esperimento della doppia fenditura con particelle massive, con la possibilità di variarne la massa, al link <https://tube.geogebra.org/material/simple/id/971719>.



Da questa simulazione possiamo vedere che se la massa che impostiamo è “piccola” (in un senso che specificheremo meglio fra breve) si ha un comportamento essenzialmente quantistico (formazione della figura di interferenza) mentre se la massa è “grande” si ritrova il comportamento atteso per una particella classica: la formazione di due distribuzioni di probabilità isolate, corrispondenti al fatto che la particella vada a cadere dietro la prima o dietro la seconda fenditura.

Questo è il motivo per cui non si osservano figure di interferenza se si sparano oggetti macroscopici (supponiamo: granelli di sabbia) contro due fenditure. La lunghezza d'onda di De Broglie è infatti

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv},$$

e la lunghezza d'onda di De Broglie di un granello di sabbia è enormemente piccola: infatti supponendo che la sua massa sia  $m \approx 10^{-6} \text{ kg}$  e la sua velocità  $v \approx 10 \text{ m/s}$  otteniamo per il granello di sabbia una lunghezza d'onda di De Broglie di  $\lambda \approx 10^{-28} \text{ m}$ . E' chiaro che una lunghezza d'onda del genere sarà enormemente più piccola, ad esempio, della distanza tra le fenditure per cui vorremmo far passare i granelli di sabbia, o della loro larghezza. Per questo motivo ri-

sulta impossibile osservare effetti quantistici in oggetti macroscopici.

**Principio di corrispondenza:** nel limite in cui la lunghezza d'onda dell'oggetto quantistico diventa estremamente piccola rispetto alle scale caratteristiche del sistema, il contributo dominante alla somma sui cammini viene dato da un solo cammino. In tale limite la fisica quantistica riproduce i risultati di teorie classiche: per il fotone, l'unico cammino che ha importanza è il raggio dell'ottica geometrica; per gli oggetti massivi, si ritrova la traiettoria classica. Per questo motivo è lecito usare la fisica classica per gli oggetti macroscopici.