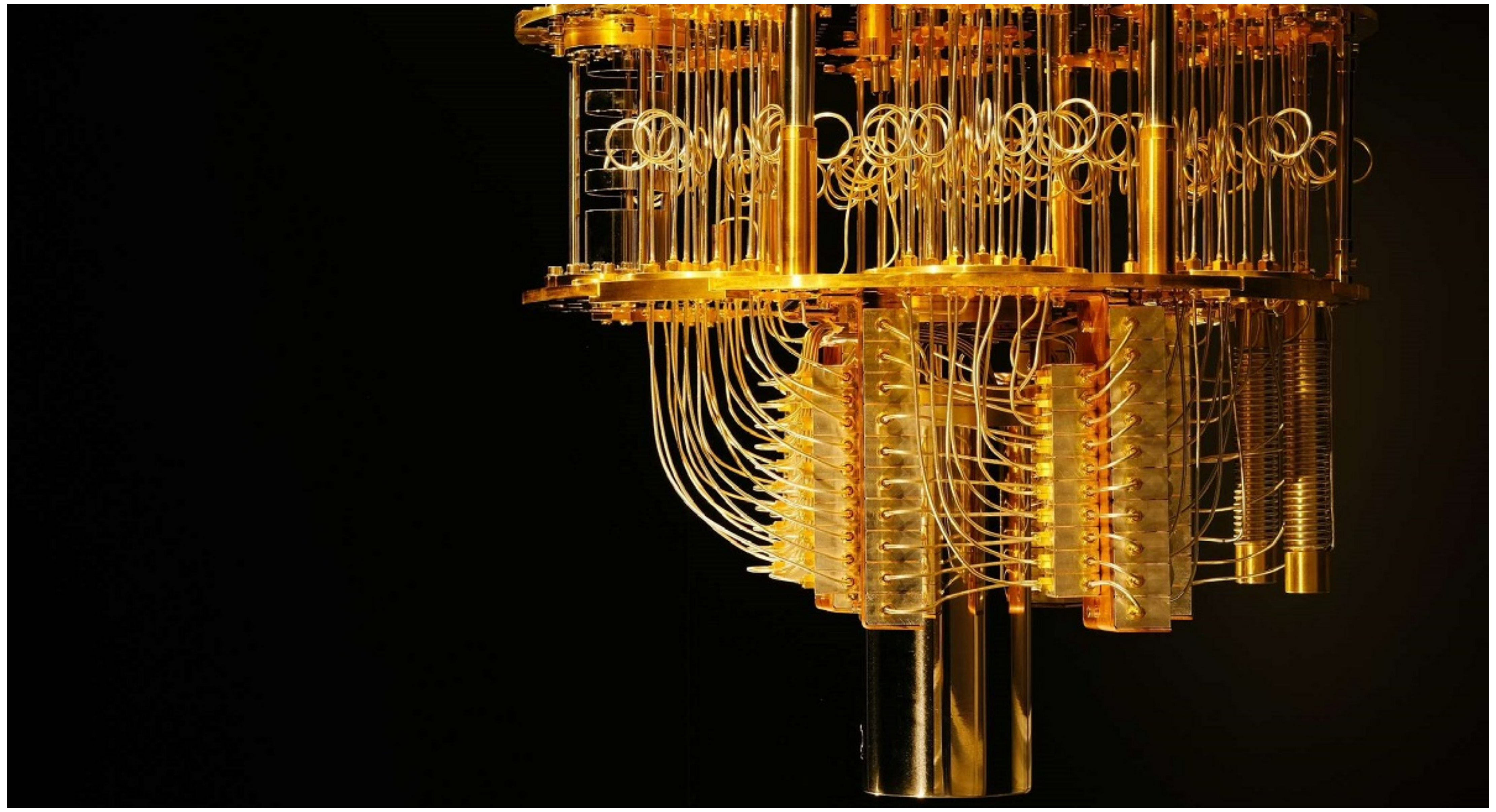
Tecnologie quantistiche

Didattica della fisica quantistica



UNIVERSITÀ DI PAVIA

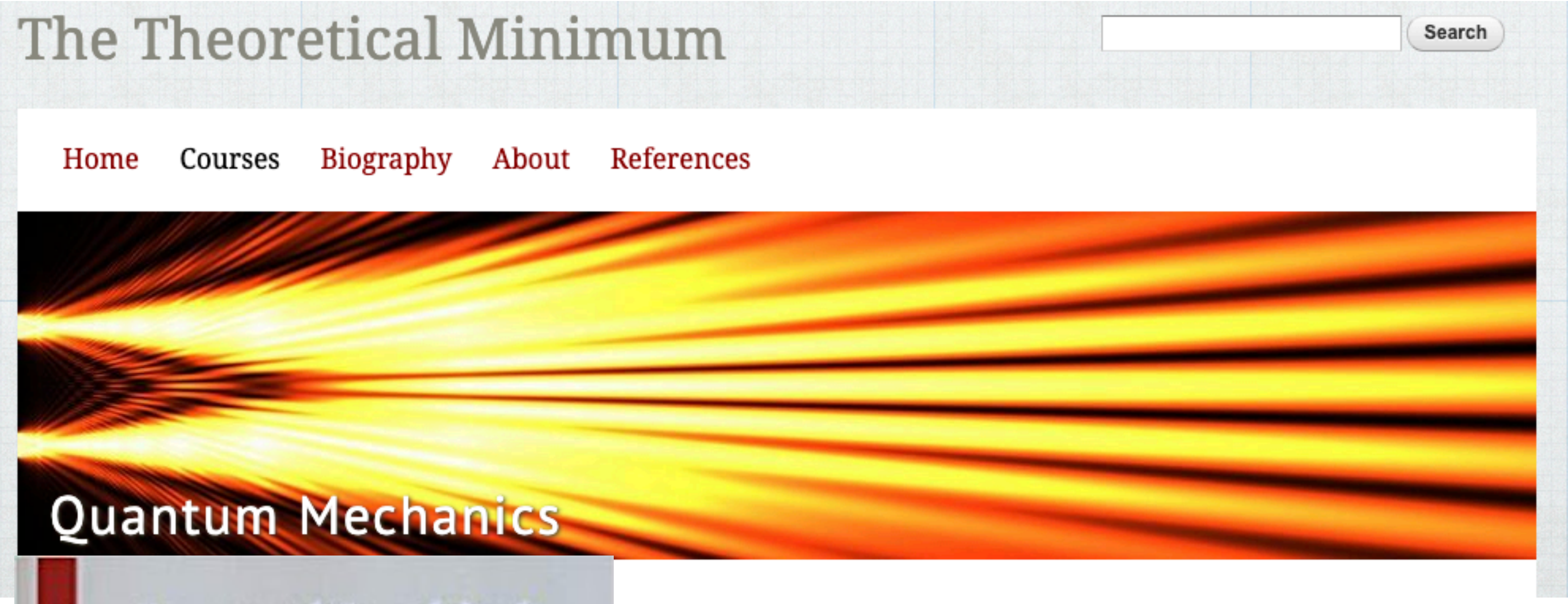
Piano Nazionale Lauree Scientifiche

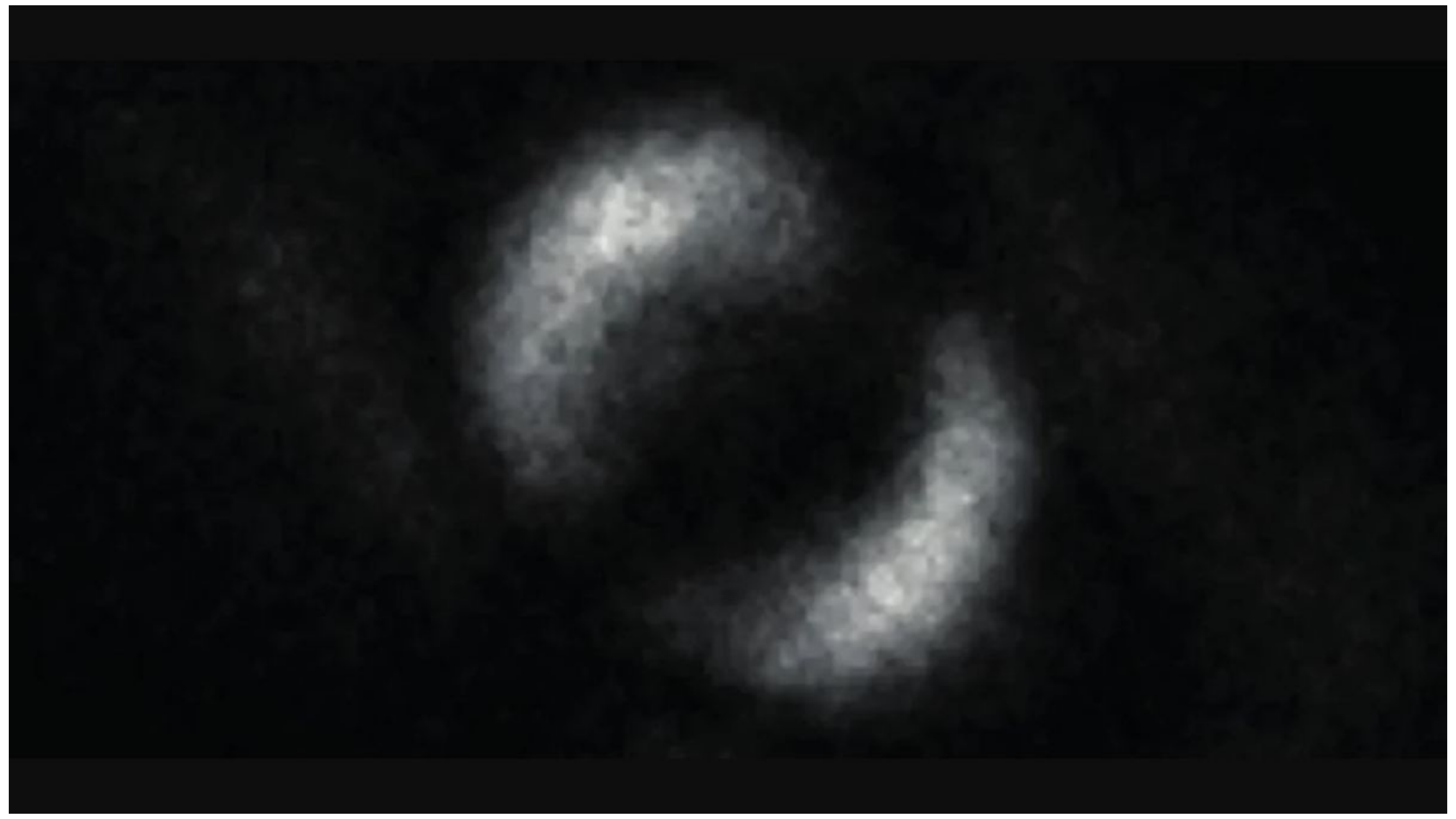
QUANTUM FLAGSHIP

Chiara Macchiavello
Lidia Falomo
Massimiliano Malgieri
Claudio Sutrini

PLS 2020-2021 - Università degli studi di Pavia - Fisica

Entanglement





"The entanglement is the characteristic trait of Quantum Mechanics, the one that enforces its entire departure from classical line of thoughts." (E. Schroedinger, 1935)

"The deep ways that quantum information differs from classical information involve the properties, implications, and uses of quantum entanglement." (J. Preskill, 2009)

Sistemi composti: stati entangled e olismo quantistico

Addentriamoci ulteriormente

$$|\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$$

Facciamo compiere la misurazione ad Alice (Bob)

A DIFFERENZA DEL CASO CLASSICO !!!

$$\langle Z_A\rangle = \langle \psi_{11}|Z_A|\psi_{11}\rangle = 0 \quad (\bullet)$$

Esercizio: dimostrare $(\bullet)$ sfruttando il formalismo matriciale. Inoltre dimostrare che analoga espressione vale nel caso degli altri due operatori.

Conclusione: $\langle Z\rangle = \langle X\rangle = \langle Y\rangle = 0$ e dunque tutti i valori di aspettazione sono nulli. Questo significa che sperimentalmente dobbiamo aspettarci equivalentemente +1 o -1 dall'esito di una misura. Questo significa che pur avendo massima conoscenza del vettore di stato ($|\psi_{11}\rangle$) non abbiamo alcuna conoscenza su nessuna delle sue parti (ossia non possiamo prevedere con certezza l'esito di una misura su una sua componente di spin.).

Sistemi composti: stati entangled

Esplicitando ulteriormente: possiamo immaginare che si abbia un dispositivo sperimentale con cui si possano preparare due particelle nello stato $|\psi_{11}\rangle$. Poi senza fare alcuna osservazione sugli spin il dispositivo consegna ciascuna delle due particelle una ad Alice e una a Bob. Come abbiamo dimostrato essi conoscono lo stato iniziale, ma non possono fare predizioni sugli esiti delle misure effettuate localmente da ciascun loro apparato sperimentale.

Domanda: che informazione possono ottenere dalla conoscenza dello stato del sistema composto?

Per rispondere dobbiamo considerare una famiglia di osservabili che possono essere misurate solo usando entrambi i rivelatori: dovremo considerare misurazioni globali e non locali.

Correlazioni

I risultati di questo tipo di esperimenti possono essere ottenuti solo se Alice e Bob si incontrano e confrontano i loro appunti oppure se essi si comunicano tali risultati.

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Caso 1 Alice e Bob condividono uno stato entangled $|\psi_{11}\rangle$ e sono separati nello spazio.

Decidono di effettuare ciascuno una misurazione Z con il proprio dispositivo sperimentale

Alice misura $Z_A \otimes I$

Bob misura $I \otimes Z_B$

E' un'operazione lecita? $\Longleftrightarrow$ Commutano le due osservabili?

Sì!!!

Esercizio: dimostrare in notazione matriciale e in notazione di Dirac che ogni osservabile di Alice commuta con ogni osservabile di Bob

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Esercizio:
completare la tabella

	$\vert 00\rangle$	$\vert 01\rangle$	$\vert 10\rangle$	$\vert 11\rangle$
Z_A	$\vert 00\rangle$	$\vert 01\rangle$	$-\vert 10\rangle$	$-\vert 11\rangle$
X_A	$\vert 10\rangle$	$\vert 11\rangle$	$\vert 00\rangle$	$\vert 01\rangle$
Y_A	$i\vert 10\rangle$	$i\vert 11\rangle$	$-i\vert 00\rangle$	$-i\vert 01\rangle$
Z_B	$\vert 00\rangle$	$-\vert 01\rangle$	$\vert 10\rangle$	$-\vert 11\rangle$
X_B	$\vert 01\rangle$	$\vert 00\rangle$	$\vert 11\rangle$	$\vert 10\rangle$
Y_B	$i\vert 01\rangle$	$-i\vert 00\rangle$	$i\vert 11\rangle$	$-i\vert 10\rangle$

Stiamo sottointendendo che
$Z_A = Z_A \otimes I$ e $Z_B = I \otimes Z_B$

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Caso 1 Alice e Bob decidono di moltiplicare i risultati ossia di misurare l'osservabile $Z_B Z_A$

$$Z_B Z_A |\psi_{11}\rangle = Z_B Z_A \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle) = Z_B(\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)) = \frac{1}{\sqrt{2}}(-|01\rangle + |10\rangle) = -|\psi_{11}\rangle$$

$$Z_B Z_A |\psi_{11}\rangle = -|\psi_{11}\rangle$$

Lo stato $|\psi_{11}\rangle$ è autovettore dell'osservabile $Z_B Z_A$ con autovalore -1

$$\langle Z_B Z_A \rangle = -1$$

Il prodotto delle due misure dà sempre come esito -1

Ma questa volta la correlazione non deriva da ignoranza sul alcuni elementi del sistema, ma è insita nello stato introdotto. E' ontologica e non epistemica

In totale analogia con il caso classico delle due SCATOLE: lo stato è sovrapposizione di due stati che posseggono spin con componenti z opposte

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Caso 1 Ma cosa accade se Alice e Bob decidono di misusare l'osservabile $X_B X_A$ o $Y_B Y_A$?

Esercizio: dimostrare che $|\psi_{11}\rangle$ è autovettore anche per $X_B X_A$ e per $Y_B Y_A$ con autovalore -1

Riassumendo: $|\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle)$

$$\langle Z\rangle = \langle X\rangle = \langle Y\rangle = 0$$

$$\langle Z_B Z_A\rangle = \langle X_B X_A\rangle = \langle Y_B Y_A\rangle = -1$$

Non ha analogo classico

$$\langle \Sigma_B \Sigma_A\rangle - \langle \Sigma_B\rangle\langle \Sigma_A\rangle = -1$$

Correlazione

Nel caso classico in cui le probabilità si fattorizzano, calcolare il valore di aspettazione di due osservabili e poi moltiplicarli equivale a determinare il valore di aspettazione del prodotto!!!

Stati massimamente entangled (singoletto)

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Possiamo dire che l'entanglement è la generalizzazione del concetto di correlazione. Alice può avere informazioni sul sistema di Bob facendo misurazioni locali. Questo può avvenire anche classicamente (per mancanza di informazione sul sistema composto) come abbiamo visto nel caso delle scatole. Ma la natura di queste correlazioni è profondamente diversa dal caso classico.

Matematicamente questo significa che la funzione di probabilità $P(A,B)$ non fattorizza.

$$\langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle \neq 0$$

A,B operatori di Alice e Bob

$$\Downarrow$$

$$C(A,B) = \langle AB\rangle - \langle A\rangle\langle B\rangle$$ Chiamiamo **correlazione** questo valore

$$-1 \leq C(A,B) \leq 1$$

Se $C(A,B)=0$ non c'è correlazione e non c'è entanglement. Maggiore (in valore assoluto) è $C(A,B)$ maggiore è il grado di entanglement.
Per uno stato prodotto $C(A,B)=0$ (dimostrare per esercizio)

Sistemi composti: correlazioni quantistiche

Caso 2

Esercizio: Alice e Bob condividono uno stato entangled $|\psi_{01}\rangle$ e sono separati nello spazio.

Decidono di effettuare ciascuno una misurazione Z con il proprio dispositivo sperimentale

$$|\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle)$$

Facciamo compiere la misurazione ad Alice (Bob) $\langle Z_A \rangle = \langle \psi_{01} | Z_A | \psi_{01} \rangle = 0$

Studiamo le correlazioni $\langle Z_B Z_A \rangle - \langle Z_B \rangle \langle Z_A \rangle = -1$

Dimostrare che $|\psi_{11}\rangle$ è autovettore anche per $X_B X_A$ e per $Y_B Y_A$ con autovalore +1

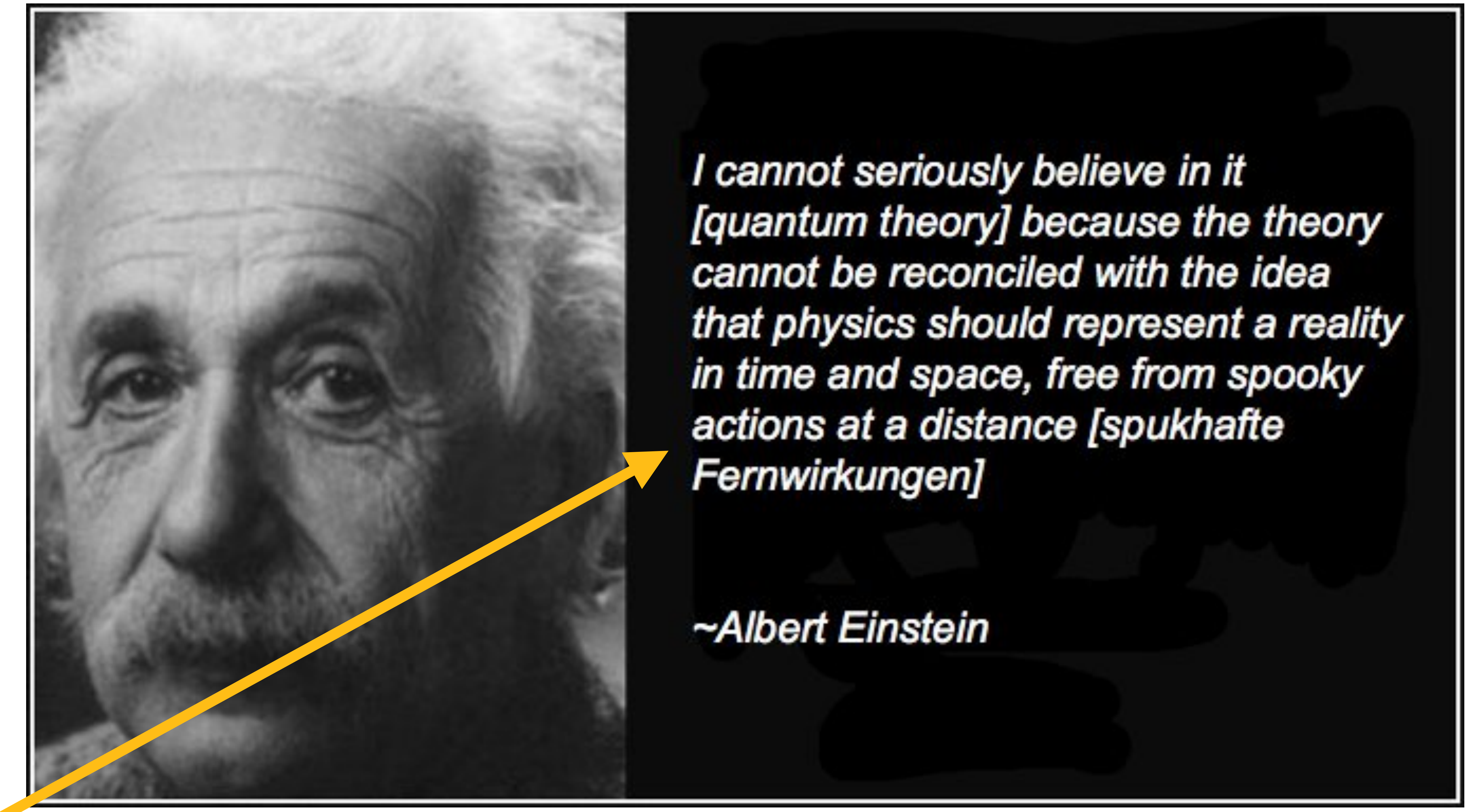
Sistemi composti: stati prodotto e stati entangled

Stati prodotto	Stati max. entangled
Ogni sottosistema è descritto in modo completo. Non esistono correlazioni tra i sottosistemi.	Il sistema composto è conosciuto in modo completo. Nessuna conoscenza sui sottosistemi. Correlazioni.
Vettore di stato: $\lvert\psi\rangle_{AB} = \alpha\gamma\lvert 00\rangle + \alpha\delta\lvert 01\rangle + \beta\gamma\lvert 10\rangle + \beta\delta\lvert 11\rangle$ **Normalizzazione:** $\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1 \qquad \gamma^*\gamma + \delta^*\delta = 1$	**Vettore di stato:** $\lvert\psi\rangle_{AB} = a\lvert 00\rangle + b\lvert 01\rangle + c\lvert 10\rangle + d\lvert 11\rangle \qquad Ex. \quad \lvert\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(\lvert 01\rangle - \lvert 10\rangle)$ **Normalizzazione:** $a^*a + b^*b + c^*c + d^*d = 1$
La probabilità si fattorizza $P(A,B) = P(A)\cdot P(B)$	**La probabilità non si fattorizza** $P(A,B) \neq P(A)\cdot P(B)$
Valori di aspettazione: $\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2 + \langle Z\rangle^2 = 1$	**Valori di aspettazione:** $\langle Z\rangle = \langle X\rangle = \langle Y\rangle = 0$ $\langle Z_B Z_A\rangle, \langle X_B X_A\rangle, \langle Y_B Y_A\rangle = \pm 1$
Correlazione: $\langle Z_B Z_A\rangle - \langle Z_B\rangle\langle Z_A\rangle = 0$	**Correlazione:** $\langle \Sigma_B \Sigma_A\rangle - \langle \Sigma_B\rangle\langle \Sigma_A\rangle = \pm 1$

Entanglement: spooky action!

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B+|\downarrow\rangle_A|\downarrow\rangle_B)\longrightarrow|\uparrow\rangle_A|\uparrow\rangle_B$$

Possiamo interpretare questo dicendo che dopo la misura effettuata da uno dei due (Alice o Bob non conta) lo stato collassa e, se i due fossero sufficientemente lontani e in modo che uno sia leggermente più distante dell’altro, la prima misurazione avrebbe l’effetto di determinare anche l’esito della seconda, questa volta con assoluta certezza.



Come è possibile che le proprietà di un sistema (possedere oggettivamente la proprietà) possano essere influenzate istantaneamente a distanza?

NON LOCALITÀ

Peculiarità correlazioni quantistiche

Verificato sperimentalmente che non possiamo giustificare gli esiti delle misurazioni con una mistura di stati, si presenta il problema che EPR sottolineano nel loro lavoro del 1935 e la cui corretta comprensione è di fondamentale importanza per comprendere la differenza tra correlazioni classiche e quantistiche:

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all’osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

Peculiarità correlazioni quantistiche (polarizzazione)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

1. Consideriamo una coppia di fotoni nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VV\rangle + |HH\rangle)$

Alice esegue una misurazione V.
Supponiamo che il fotone superi il test $\Rightarrow$ Alice saprebbe, un istante dopo la propria misurazione, che il secondo fotone supererebbe un test V con p(V)=1

$\xrightarrow{\textbf{R}}$ In quell'istante il fotone 2 avrebbe un elemento di realtà fisica V $\xrightarrow{\textbf{LE}}$ Il fotone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà V

Peculiarità correlazioni quantistiche (polarizzazione)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

2. Consideriamo una coppia di fotoni nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|VV\rangle + |HH\rangle)$

Alice esegue una misurazione 45°. Supponiamo che il fotone superi il test $\Rightarrow$ Alice saprebbe, un istante dopo la propria misurazione, che il secondo fotone supererebbe un test 45° con p(45°)=1

$\xrightarrow{\textbf{R}}$ In quell'istante il fotone 2 avrebbe un elemento di realtà fisica 45° $\xrightarrow{\textbf{LE}}$ Il fotone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà 45°

Peculiarità correlazioni quantistiche (polarizzazione)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

R + LE $\Rightarrow$ Il fotone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà 45° e V

Peculiarità correlazioni quantistiche (polarizzazione)

Poiché richieste naturali e ovvie ci hanno portato a concludere che il fotone 2 possiede simultaneamente proprietà incompatibili questo significa che, di fatto, anche se non risulta possibile determinare con precisione arbitraria queste proprietà, esse ciò nondimeno devono essere considerate come possedute oggettivamente dal sistema. Ma la MQ nega questa possibilità e lo stato non contiene alcun elemento formale che possa specificare queste proprietà.

↓

La MQ è una teoria basilarmente incompleta, essa non è in grado di descrivere, non lascia spazio per rendere conto di elementi di realtà fisica che si devono riconoscere come posseduti da un sistema fisico.

Analogamente: il fotone 2 ha prima della misura, la proprietà V. Ma lo stato è invariate per rotazioni e non contiene informazioni su V. Ma la teoria asserisce che lo stato rappresenta il massimo dell'informazione possibile. Quindi la teoria è incompleta.

Peculiarità correlazioni quantistiche (spin)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

1. Consideriamo una coppia di elettroni nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$

Alice esegue una misurazione Z. Supponiamo che l'esito della misurazione sia -1

$\Rightarrow$ Alice saprebbe, un istante dopo la propria misurazione, che il secondo elettrone darebbe come esito della misurazione -1 con $p(|\downarrow\rangle)=1$

$\xRightarrow{\textbf{R}}$ In quell'istante l'elettrone 2 avrebbe un elemento di realtà fisica spin-down Z.

$\xRightarrow{\textbf{LE}}$ L' elettrone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà spin-down Z

Peculiarità correlazioni quantistiche (spin)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

2. Consideriamo una coppia di elettroni nello stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\rangle + |\downarrow\downarrow\rangle)$

Alice esegue una misurazione X. Supponiamo che l'esito della misurazione sia -1

$\Rightarrow$ Alice saprebbe, un istante dopo la propria misurazione, che il secondo elettrone darebbe come esito della misurazione -1 con p($|-\rangle$)=1

$\xrightarrow{\textbf{R}}$ In quell'istante l'elettrone 2 avrebbe un elemento di realtà fisica spin-down X.

$\xrightarrow{\textbf{LE}}$ L'elettrone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà spin-down X

Peculiarità correlazioni quantistiche (spin)

Ipotesi:

R (realtà): Se, senza disturbare in alcun modo un sistema è possibile prevedere con certezza il risultato di una misurazione di una osservabile del sistema, allora esiste un elemento di realtà associato all'osservabile in questione, o equivalentemente, il sistema possiede oggettivamente (indipendentemente da qualsiasi osservatore, dal fatto che la misurazione sia effettuata o meno) la relativa proprietà.

LE (Località einsteiniane): Gli elementi di realtà fisica posseduti oggettivamente da un sistema non possono venire influenzati istantaneamente a distanza.

R + LE $\Rightarrow$ L'elettrone 2 aveva prima e indipendentemente dalla misurazione la proprietà spin-down Z e spin-down X.

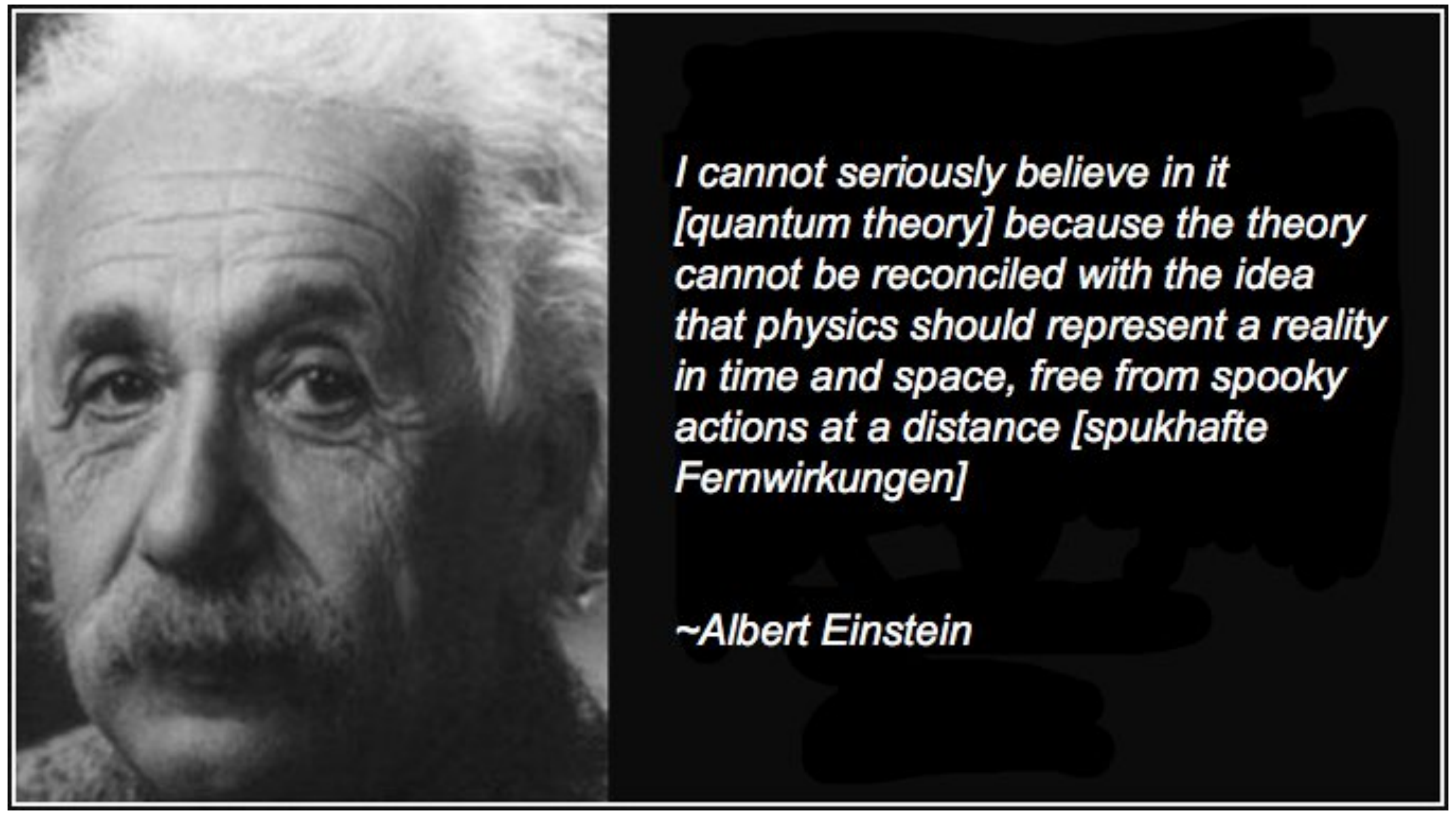
Peculiarità correlazioni quantistiche (spin)

Poiché richieste naturali e ovvie ci hanno portato a concludere che l'elettrone 2 possiede simultaneamente proprietà incompatibili ($[\sigma_{X,2}, \sigma_{Z,2}] \neq 0$) questo significa che, di fatto, anche se non risulta possibile determinare con precisione arbitraria queste proprietà, esse ciò nondimeno devono essere considerate come possedute oggettivamente dal sistema. Ma la MQ nega questa possibilità e lo stato non contiene alcun elemento formale che possa specificare queste proprietà.

La MQ è una teoria basilarmente incompleta, essa non è in grado di descrivere, non lascia spazio per rendere conto di elementi di realtà fisica che si devono riconoscere come posseduti da un sistema fisico.

Analogamente: l'elettrone 2 ha prima della misura, la proprietà spin-down Z. Ma lo stato è invariante per rotazioni e non contiene informazioni su spin-down Z. Ma la teoria asserisce che lo stato rappresenta il massimo dell'informazione possibile. Quindi la teoria è incompleta.

Entanglement: spooky action!



La probabilità in MQ è dello stesso tipo di quella in MC.
Basta aggiungere delle variabili nascoste!

Speranza di Einstein

"…la teoria statistica dei quanti avrebbe, nel quadro della fisica futura, assunto una posizione approssimativamente analoga alla meccanica statistica nel quadro della meccanica classica"

Un decennio dopo la morte di Einstein, John Bell infranse questo sogno: qualsiasi completamento della meccanica quantistica con variabili nascoste sarebbe incompatibile con la causalità relativistica!

Teorema di Bell

A simple proof of Bell's inequality

Lorenzo Maccone

Dip. Fisica, Univ. of Pavia, via Bassi 6, I-27100 Pavia, Italy

L'essenza del teorema di Bell è che le probabilità della meccanica quantistica non possono derivare dall'ignoranza di variabili locali preesistenti.

Se vogliamo assegnare proprietà preesistenti (ma nascoste) per spiegare le probabilità nelle misurazioni quantistiche, queste proprietà devono essere non locali: un agente con accesso alle variabili non locali potrebbe trasmettere informazioni istantaneamente a una località lontana, violando così la causalità relativistica e risvegliando i più brutti paradossi temporali.

LOCALITÀ

EINSTEIN: località si riferisce al fatto che non sia possibile una comunicazione superluminale.

$$\neq$$

MQ: la meccanica quantistica è considerata "non locale" nel senso che le correlazioni tra le proprietà possono propagarsi istantaneamente, grazie all'entanglement.

Teorema di Bell

L'essenza del teorema di Bell è che le probabilità della meccanica quantistica non possono derivare dall'ignoranza di variabili locali preesistenti.

Se vogliamo assegnare proprietà preesistenti (ma nascoste) per spiegare le probabilità nelle misurazioni quantistiche, queste proprietà devono essere non locali: un agente con accesso alle variabili non locali potrebbe trasmettere informazioni istantaneamente a una località lontana, violando così la causalità relativistica e risvegliando i più brutti paradossi temporali.

O accettiamo che le misurazioni non scoprano proprietà preesistenti

O accettiamo di inserire nella teoria proprietà non locali con l'aggiunta di meccanismi che impediscano l'uso di variabili nascoste per impedire la trasmissione di informazioni

Teorema di Bell

Teorema: la meccanica quantistica non può essere sia locale che controfattuale-definita.

Locale: una teoria in cui i risultati di un esperimento su un sistema sono indipendenti dalle azioni compiute su un sistema diverso che non ha alcuna connessione causale con il primo (località alla Einstein).

Controfattuale-definita: una teoria i cui esperimenti scoprono proprietà preesistenti, in cui ha senso assegnare una proprietà a un sistema (per esempio la posizione di un elettrone) indipendentemente dal fatto che la misurazione di tale proprietà sia stata effettuata.

Per **dimostrare** questo teorema, Bell ha fornito una disuguaglianza (riferita alle correlazioni dei risultati di misura) che è soddisfatta da tutte le teorie che sono sia locali che controfattuali-definite. Ha poi dimostrato che la meccanica quantistica viola questa disuguaglianza, e quindi non può essere locale e controfattuale-definita.

Disuguaglianza di Bell

Ipotesi:
1. Consideriamo due oggetti identici, ossia abbiano le stesse proprietà (per la dimostrazione sono sufficienti tre proprietà A,B,C che possono assumere solo due valori 0,1).
2. Le proprietà siano predeterminate e non generate dalla loro misurazione (**teoria controfattuale-definita**)
3. La determinazione delle proprietà di un oggetto non influenzi nessuna proprietà dell'altro (**teoria locale**)

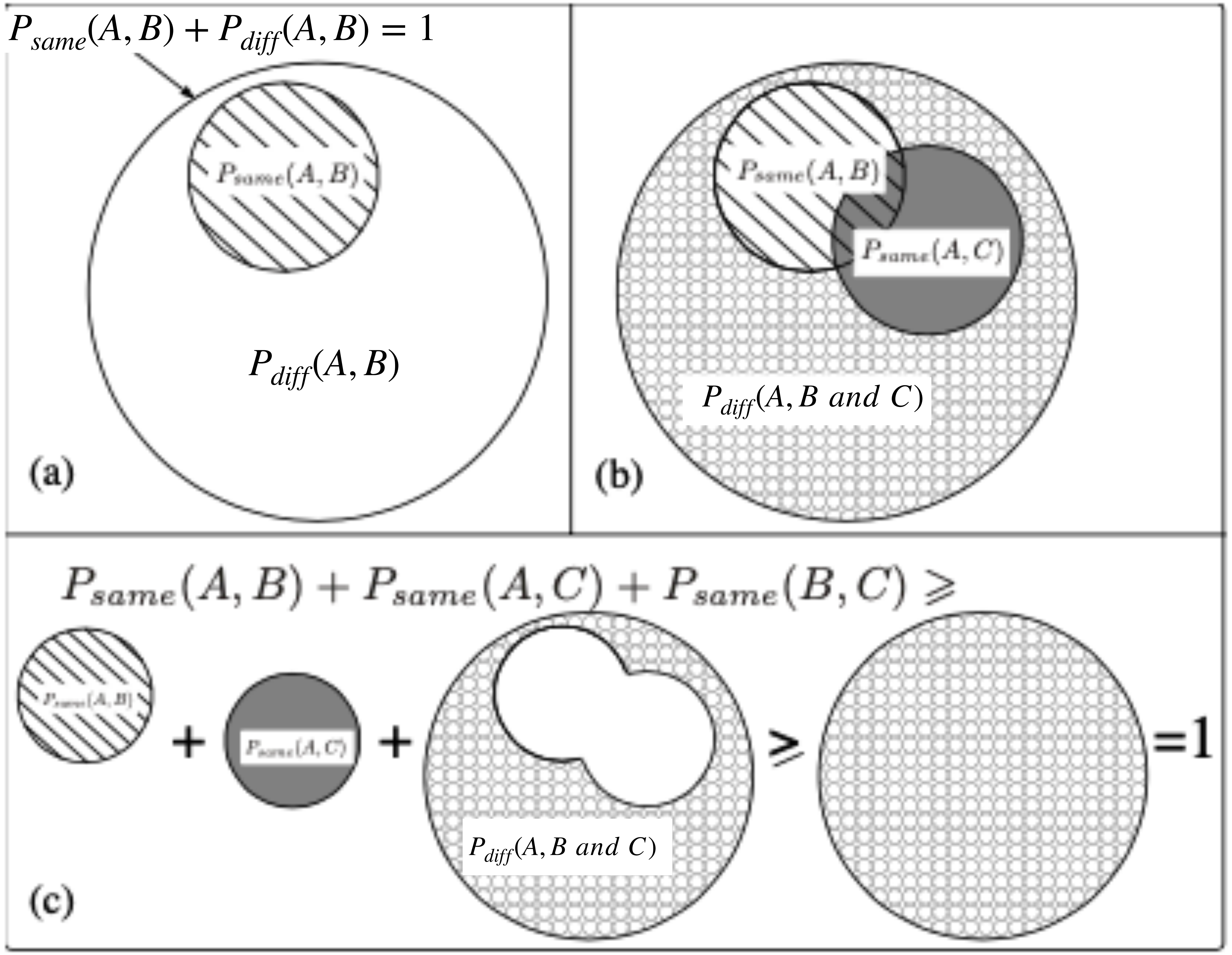
Tesi: $P_{same}(A,B) + P_{same}(B,C) + P_{same}(A,C) \geq 1$ **Disuguaglianza di Bell**

$P_{same}(A,B)$ la probabilità che le proprietà A del primo oggetto e B del secondo siano uguali.

Dimostrazione: la disuguaglianza di Bell (così scritta) si riferisce alla correlazione tra i risultati di misurazione delle proprietà.
Dall'ipotesi che i due oggetti sono uguali otteniamo: $P_{same}(A,A) = P_{same}(B,B) = P_{same}(C,C) = 1$

Quest'ultima equazione e le ipotesi di controfattualità e località ci permettono immediatamente di dimostrare la disuguaglianza.

Disuguaglianza di Bell

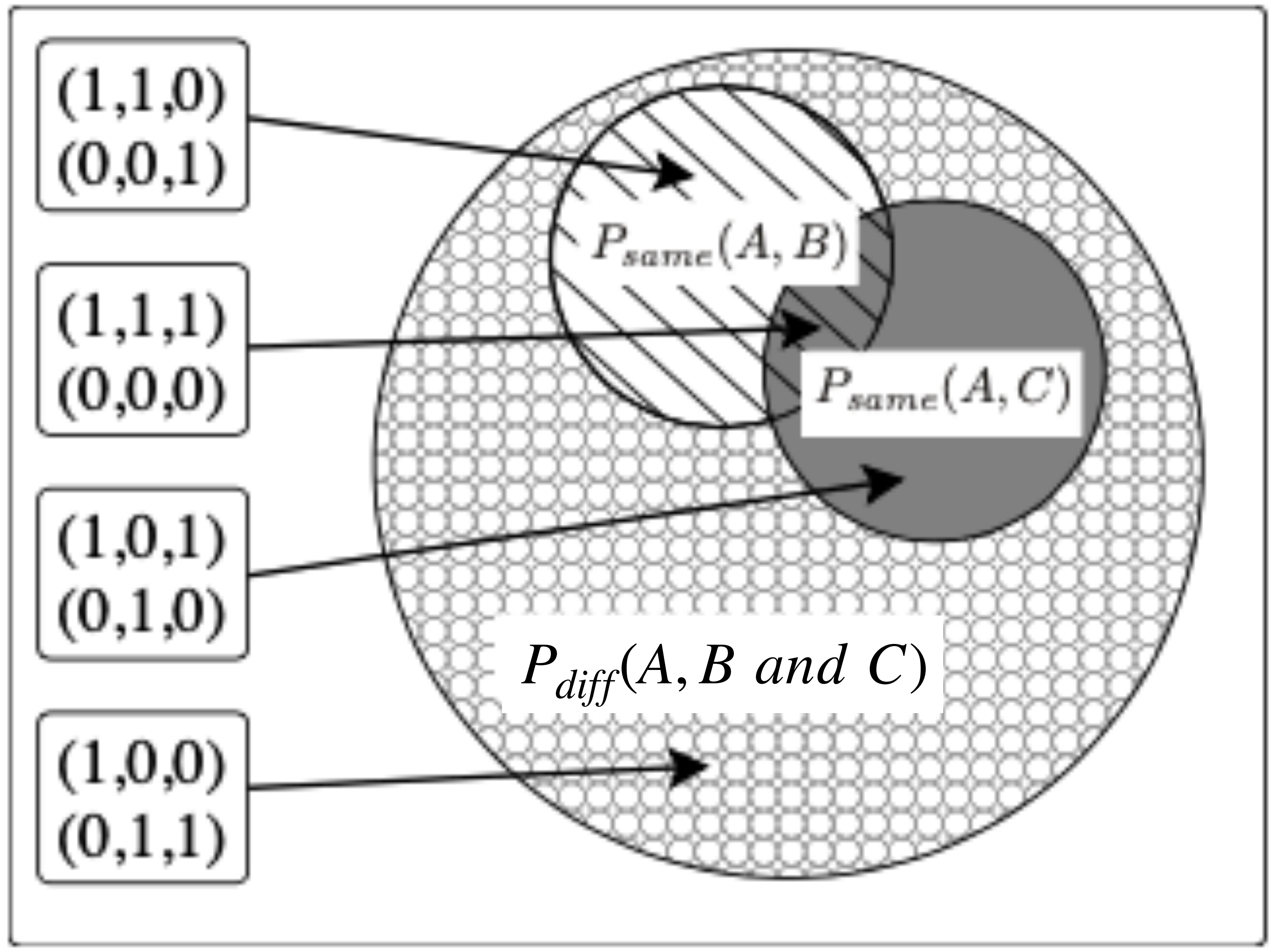


(a) L'area tratteggiata rappresenta la probabilità che la proprietà A del primo oggetto e B del secondo siano uguali (entrambe 1 o entrambe 0): $P_{same}(A,B)$. L'area bianca rappresenta la probabilità che siano diverse: $P_{diff}(A,B)$. L'intero cerchio ha area 1 $P_{same}(A,B) + P_{diff}(A,B) = 1$.

(b) L'area grigia rappresenta la probabilità che A e C siano uguali, e l'area non grigia rappresenta la probabilità che A e C siano diversi. Se A del primo oggetto è diverso sia da B che da C del secondo (area a bolle), allora B e C del secondo oggetto devono essere uguali. Quindi, la probabilità che B e C siano uguali deve essere maggiore (o uguale) all'area a bolle: poiché B è lo stesso per i due oggetti, $P_{same}(B,C)$ deve essere maggiore (o uguale) all'area a bolle.

(c) La quantità $P_{same}(A,B) + P_{same}(B,C) + P_{same}(A,C)$ è quindi maggiore (o uguale) alla somma delle aree tratteggiata + grigia + a bolle, che è a sua volta maggiore (o uguale) al cerchio completo di area 1: questo prova la disuguaglianza di Bell.

Disuguaglianza di Bell: osservazioni sulla dimostrazione



$$P_{same}(A,B) + P_{same}(B,C) + P_{same}(A,C) \geq 1$$

In effetti la correttezza della disuguaglianza è intuitiva e si vede subito assegnando come in figura le possibili terne di valori corrispondenti agli elementi degli insiemi.

Ma questo è vero solo se i due oggetti hanno le stesse proprietà controfattuali-definite e la misura dell'uno non influenza l'esito dell'altro.

Se non abbiamo proprietà controfattuali-definite, non possiamo dedurre che, ad esempio, la prima proprietà del primo oggetto è 1 solo perché abbiamo misurato che la prima proprietà del secondo è 1, anche se sappiamo che i due oggetti hanno le stesse proprietà: senza controfattualità, non possiamo nemmeno parlare di una proprietà del primo oggetto se non la misuriamo. Inoltre, se una misurazione di una proprietà del secondo oggetto può cambiare quella del primo (non-località) ancora una volta non possiamo dedurre la proprietà del primo oggetto da una misurazione della stessa proprietà sul secondo: anche se sappiamo che la proprietà per i due oggetti era la stessa, la misurazione sul secondo può cambiare tale proprietà del primo.

Teorema di Bell

Per dimostrare il teorema di Bell non rimane che mostrare che esiste un sistema quantistico che viola la disuguaglianza precedente.

Consideriamo due qubits nello stato di Bell

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

E consideriamo le proprietà a due valori A,B e C ottenute proiettando il qubit sugli stati: $|x_0\rangle, |x_1\rangle$ (ortogonali)

$$A: \begin{cases} |a_0\rangle \equiv |0\rangle \\ |a_1\rangle \equiv |1\rangle \end{cases}, \qquad B: \begin{cases} |b_0\rangle \equiv \frac{1}{2}|0\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \\ |b_1\rangle \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle - \frac{1}{2}|1\rangle \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} |c_0\rangle \equiv \frac{1}{2}|0\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2}|1\rangle \\ |c_1\rangle \equiv \frac{\sqrt{3}}{2}|0\rangle + \frac{1}{2}|1\rangle \end{cases},$$

Teorema di Bell

E' immediato verificare che

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{|a_0a_0\rangle + |a_1a_1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|b_0b_0\rangle + |b_1b_1\rangle}{\sqrt{2}} = \frac{|c_0c_0\rangle + |c_1c_1\rangle}{\sqrt{2}}$$

da cui deduciamo che i due qubit hanno le stesse proprietà, ossia $P_{same}(A,A) = P_{same}(B,B) = P_{same}(C,C) = 1$: la misurazione della stessa proprietà su entrambi i qubit dà sempre lo stesso risultato, entrambi 0 o entrambi 1.

Per determinare $P_{same}(A,B)$, $P_{same}(B,C)$ e $P_{same}(A,C)$ conviene scrivere

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{|a_0\rangle(|b_0\rangle + \sqrt{3}|b_1\rangle) + |a_1\rangle(|\sqrt{3}|b_0\rangle - |b_1\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

$$|\psi_{00}\rangle = \frac{|a_0\rangle(|c_0\rangle+\sqrt{3}|c_1\rangle)-|a_1\rangle(|\sqrt{3}|c_0\rangle-|c_1\rangle)}{2\sqrt{2}}$$

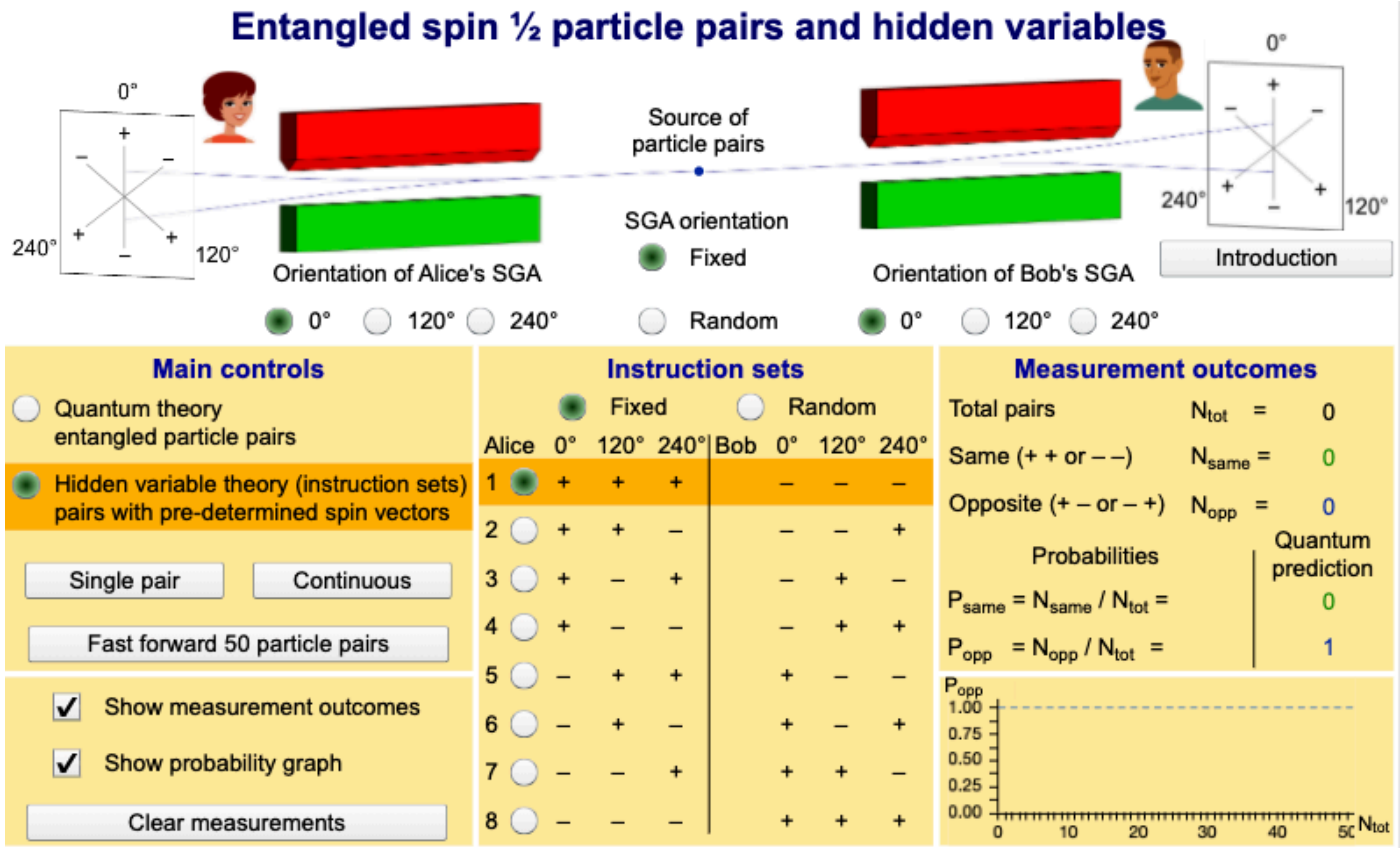
$$|\psi_{00}\rangle = \frac{(|b_0\rangle+\sqrt{3}|b_1\rangle)(|c_0\rangle+\sqrt{3}|c_1\rangle)-(\sqrt{3}|b_0\rangle-|b_1\rangle)(\sqrt{3}|c_0\rangle-|c_1\rangle)}{4\sqrt{2}}$$

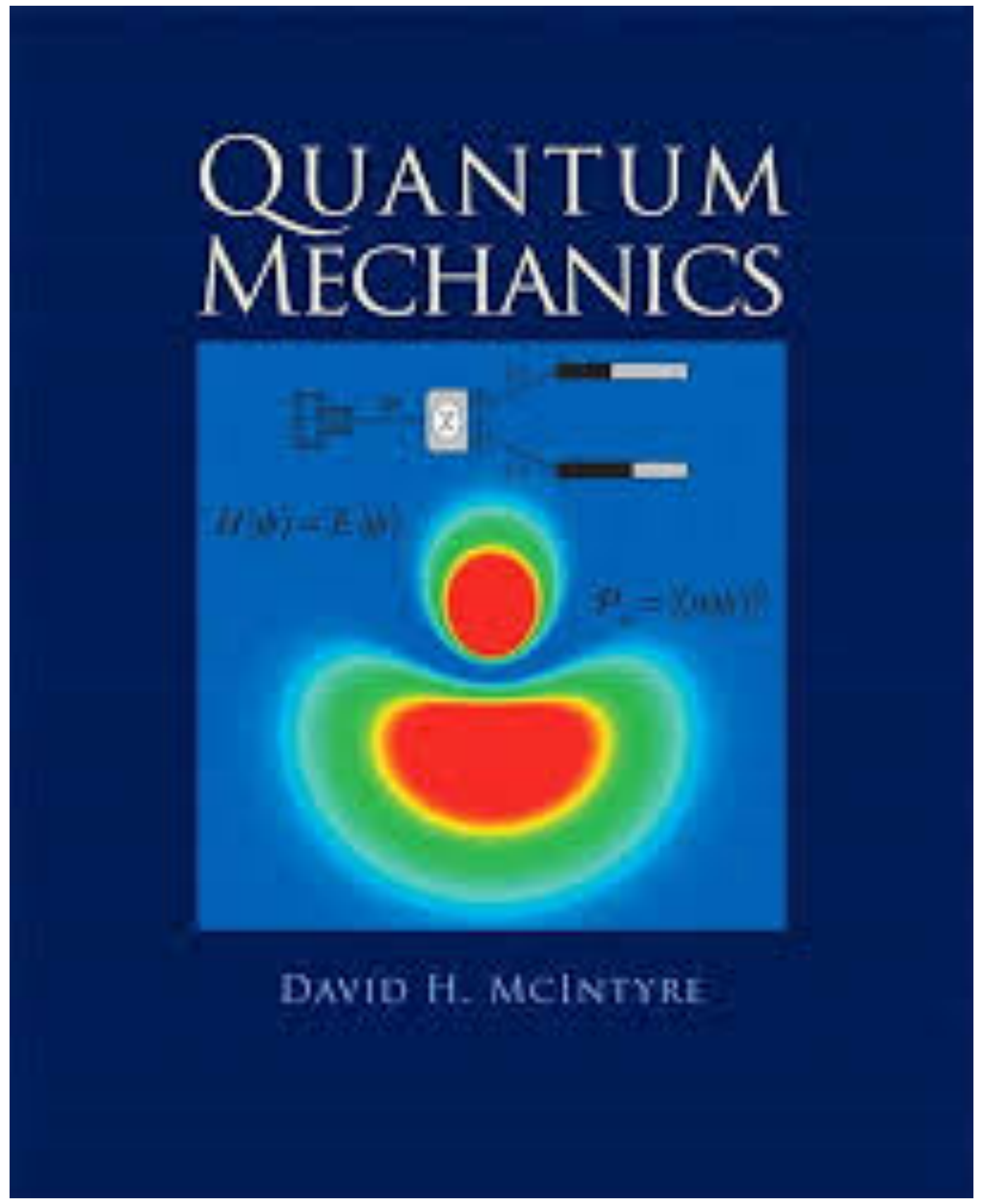
$$\boxed{P_{same}(A,B) = p(a_0,b_0) + p(a_1,b_1)}$$

$$P_{same}(A,B) + P_{same}(A,C) + P_{same}(B,C) = \tfrac{3}{4} < 1$$

Vedi presentazione analoga costruita sotto forma di dialogo tratta dalle dispense di Preskill citate in bibliografia e (materiale condiviso).

Variabili nascoste e disuguaglianza di Bell





Bibliografia

Bell, J. S., & Bell, J. S. (2004). Speakable and unspeakable in quantum mechanics: Collected papers on quantum philosophy. Cambridge university press.

Beltrametti, E. G., & Bugajski, S. (2004). Separating classical and quantum correlations. *International Journal of Theoretical Physics*, *43*(7), 1793-1801.

Benenti, G., Casati, G., Rossini, D., & Strini, G. (2018). Principles of Quantum Computation and Information: A Comprehensive Textbook. World scientific.

Einstein, A., Podolsky, B., & Rosen, N. (1935). Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?. *Physical review*, *47*(10), 777.

Ghirardi, G., Marinatto, L., & Weber, T. (2002). Entanglement and properties of composite quantum systems: a conceptual and mathematical analysis. *Journal of Statistical Physics*, *108*(1), 49-122.

Ghirardi, G. C. (2009). Un'occhiata alle carte di Dio. Gli interrogativi che la scienza moderna pone all'uomo (Vol. 70). Il saggiatore.

Maccone, L. (2013). A simple proof of Bell's inequality. *American Journal of Physics*, *81*(11), 854-859.

McIntyre, D. H., Manogue, C. A., & Tate, J. (2012). *Quantum mechanics: a paradigms approach* (Vol. 192). Boston: Pearson.

J. Preskill, lecture notes at http://www.theory.caltech.edu/people/preskill/ph229

Susskind, L., & Friedman, A. (2014). Quantum mechanics: the theoretical minimum. Basic Books. (Edizione italiana: Meccanica quantistica, Il minimo indispensabile per fare della (buona) fisica, Ed. Cortina).