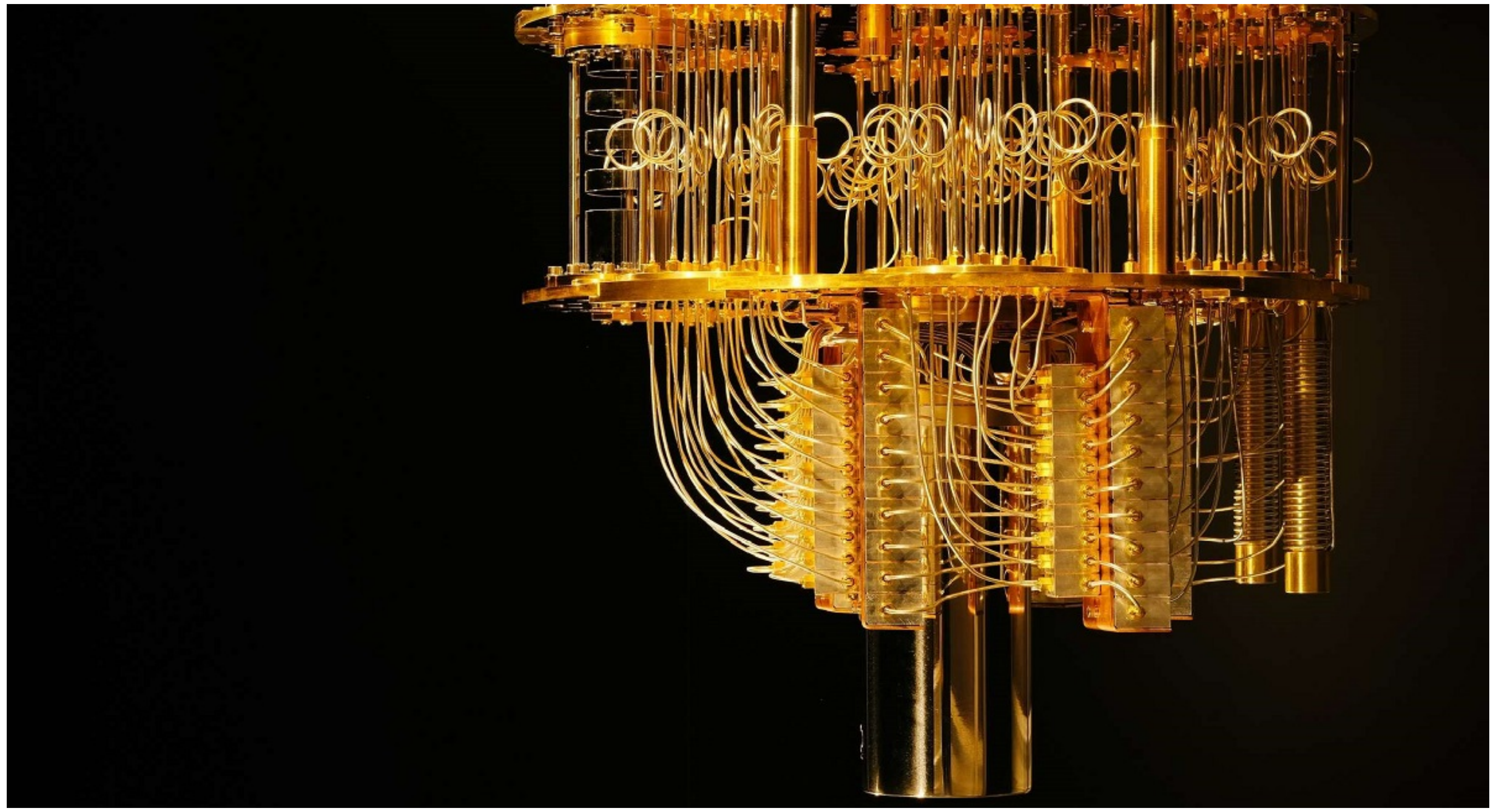
Tecnologie quantistiche

Didattica della fisica quantistica



PLS 2020-2021 - Università degli studi di Pavia - Fisica

UNIVERSITÀ DI PAVIA

Piano Nazionale Lauree Scientifiche

QUANTUM FLAGSHIP

Chiara Macchiavello
Lidia Falomo
Massimiliano Malgieri
Claudio Sutrini

Percorso

I primi quattro incontri

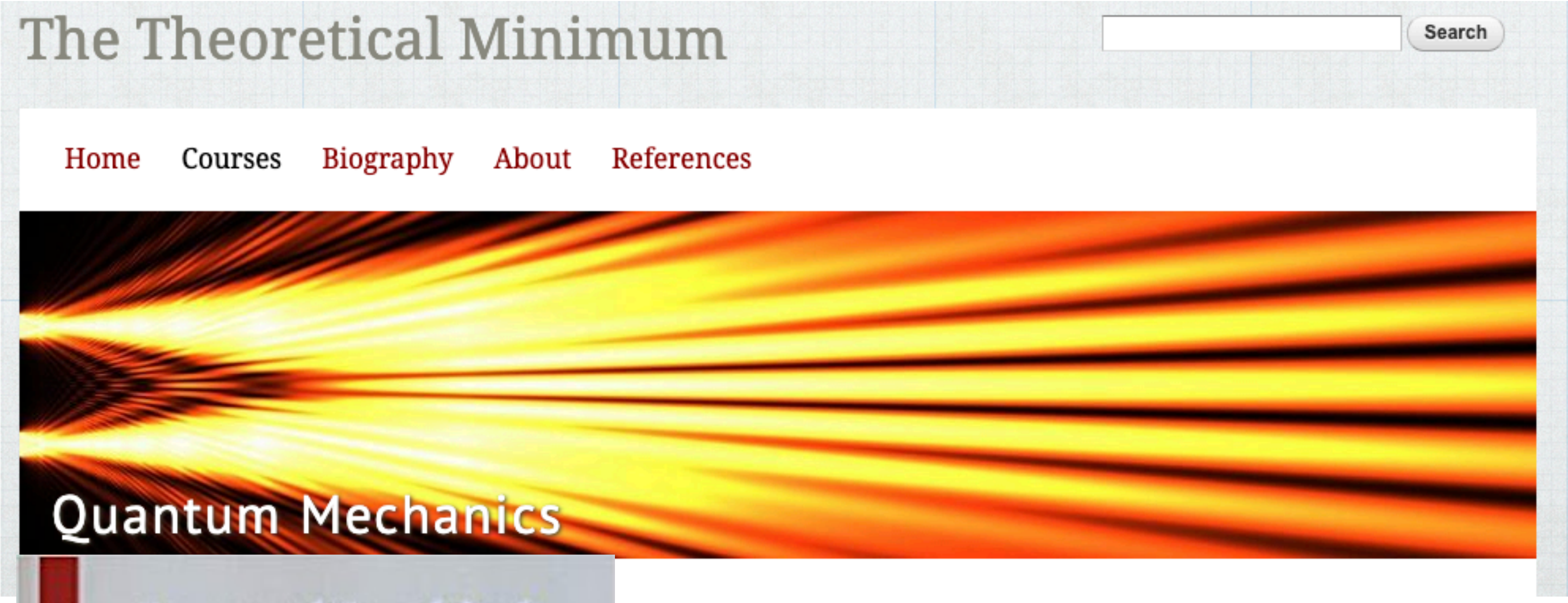
Termodinamica del calcolo
Logica reversibile

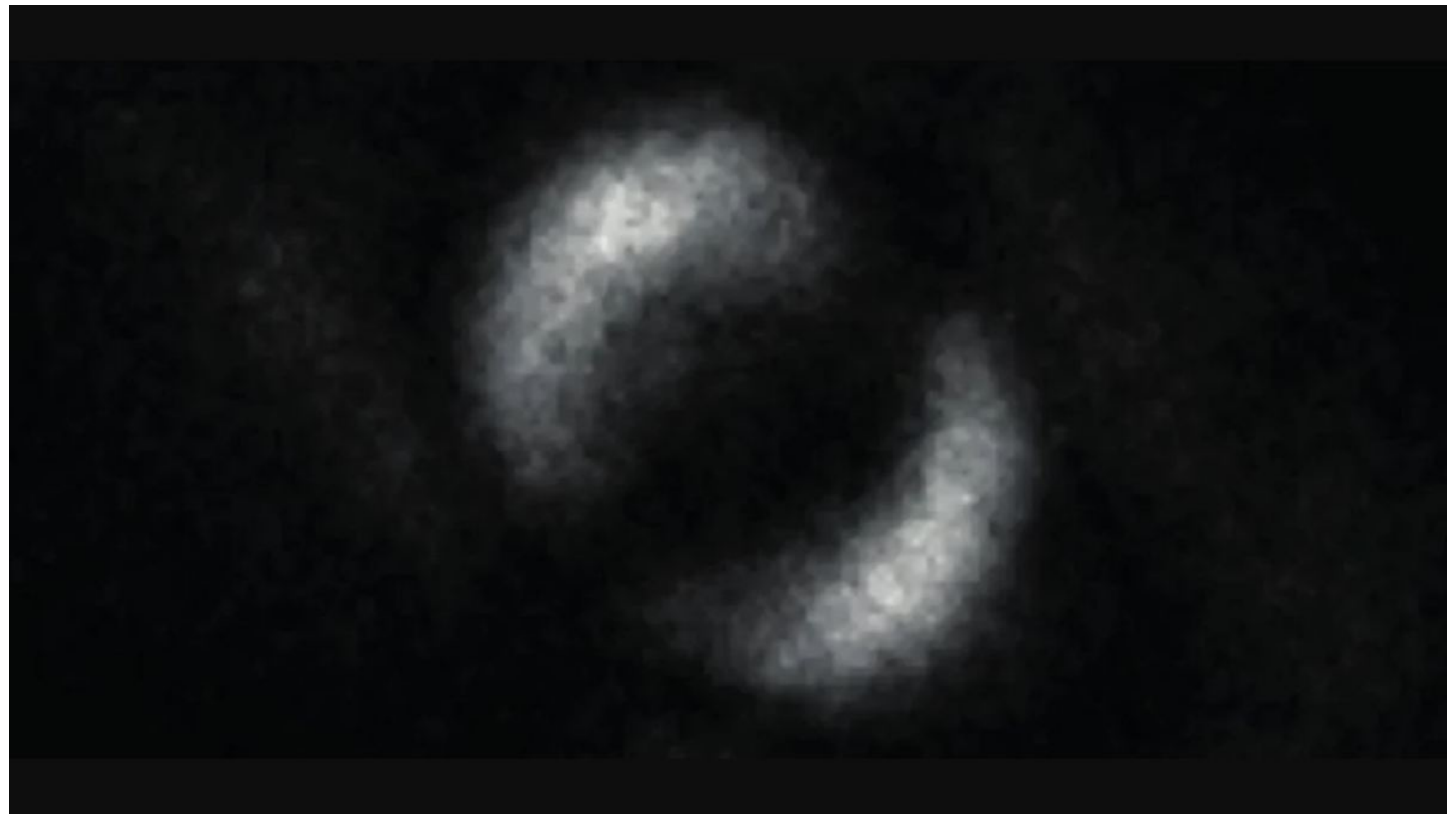
FQ dispositivo S&G
Principio di sovrapposizione
Osservabili non compatibili

Dal bit al qubit
Circuiti quantistici

Algoritmi quantistici

Entanglement





"The entanglement is the characteristic trait of Quantum Mechanics, the one that enforces its entire departure from classical line of thoughts." (E. Schroedinger, 1935)

"The deep ways that quantum information differs from classical information involve the properties, implications, and uses of quantum entanglement." (J. Preskill, 2009)

Sistemi composti

Il punto di partenza di questa secondo ciclo di incontri è il ruolo dei sistemi composti e la profonda differenza tra il caso classico e quello quantistico

SISTEMI COMPOSTI CLASSICI

$$A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$$

Lo spazio degli stati complessivo è sempre il prodotto di n sottospazi

La conoscenza del sistema composto implica la conoscenza delle sue parti.

L'utilizzo della probabilità è dovuto solo ad ignoranza sul sistema. (Correlazioni classiche)

SISTEMI COMPOSTI QUANTISTICI

$$H = \otimes_{l=1}^{n} H_l$$

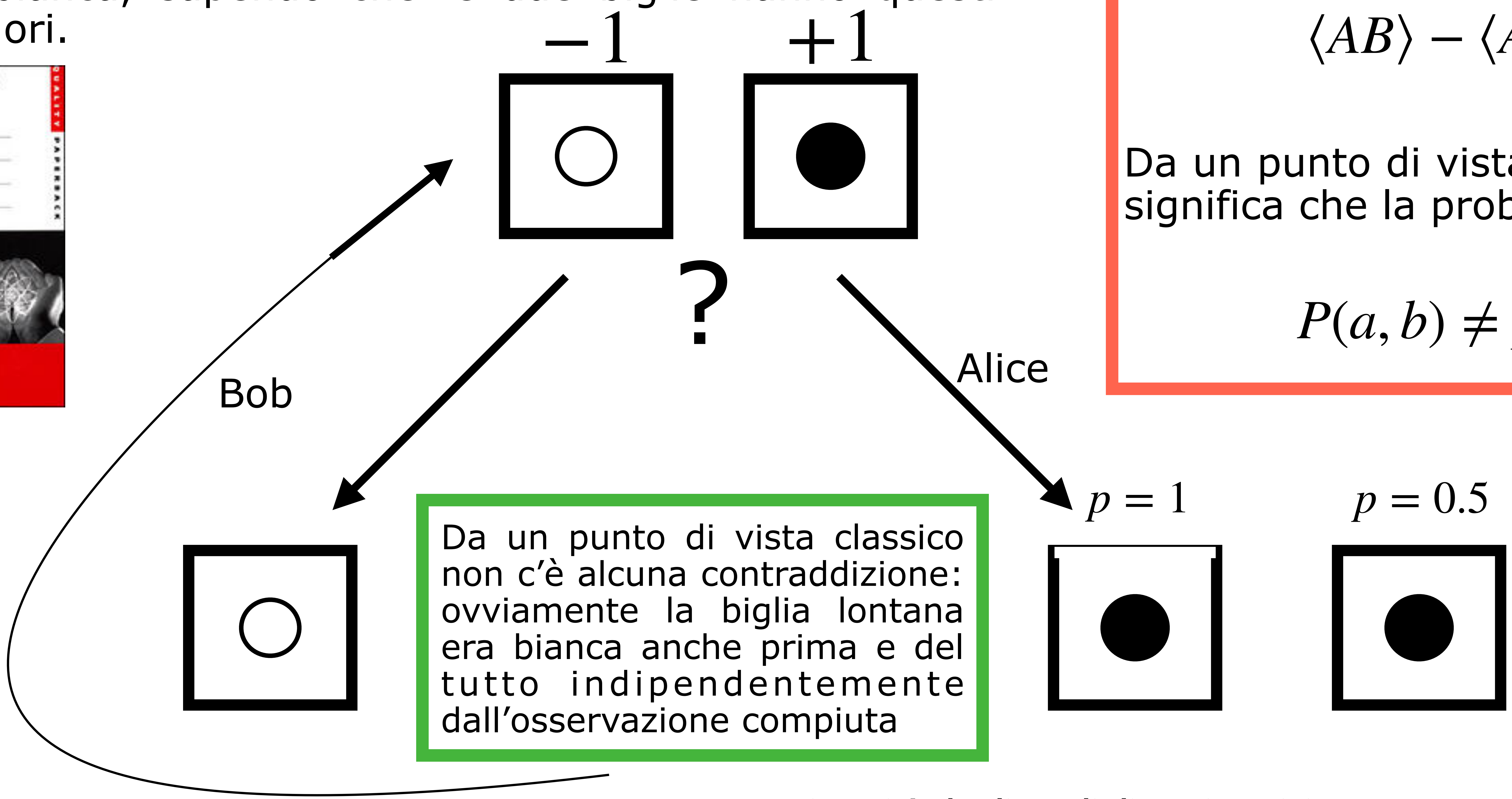
In generale non è possibile ottenere un singolo vettore di stato come prodotto di n vettori corrispondenti agli n sottosistemi

La conoscenza del sistema composto non permette la conoscenza delle sue parti.

L'utilizzo della probabilità è intrinseco alla teoria quantistica (Correlazioni quantistiche: non località)

Sistemi composti: il caso classico

Alice e Bob scelgono casualmente una scatola tra due, una contenente una biglia nera e una contenente una biglia bianca, sapendo che le due biglie hanno questi due colori.



Da un punto di vista classico non c'è alcuna contraddizione: ovviamente la biglia lontana era bianca anche prima e del tutto indipendentemente dall'osservazione compiuta

$$\langle \Sigma \rangle = \sum_i \sigma_i \, P(\sigma_i)$$

$$\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle = -1$$

Da un punto di vista probabilistico questo significa che la probabilità non fattorizza.

$$P(a,b) \neq p_A(a) \cdot p_B(b)$$

Sistemi composti: il caso classico

$$\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle = -1$$

Da un punto di vista probabilistico questo significa che la probabilità non fattorizza.

$$P(a,b) \neq p_A(a) \cdot p_B(b)$$

Se considerassimo invece due coppie di scatole (due eventi indipendenti)

$$\langle AB \rangle - \langle A \rangle \langle B \rangle = 0$$

$$P(a,b) = p_A(a) \cdot p_B(b)$$

L'utilizzo della probabilità è dovuto al fatto che in origine non sappiamo quale biglia ci sia in ciascuna scatola. Ma in linea di principio potremmo guardare di nascosto senza per questo alterare l'esito delle successive misurazioni.

$\Downarrow$

Se facessimo così potremmo conoscere il sistema composto e questa conoscenza implica, naturalmente, la conoscenza delle sue singole parti. La conoscenza sul sistema completo implica la conoscenza completa sulle singole parti.

Sistemi composti: il caso classico

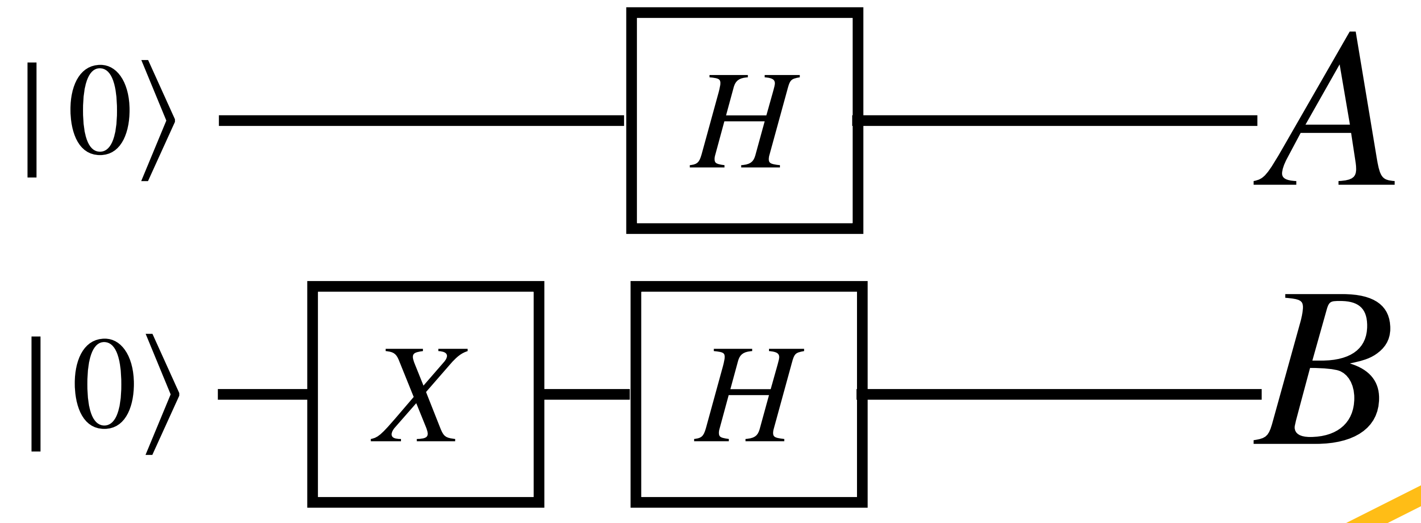
J. Bell

I calzini di Bertlmann: “Il filosofo dilettante, che non ha dovuto penare sulle dispense di meccanica quantistica è piuttosto indifferente alle correlazioni EPR. Egli potrebbe indicare molti esempi di correlazioni di questo tipo nella vita quotidiana. Si cita spesso il caso dei calzini di Bertlmann. Il dottor Bertlmann ama indossare i calzini di colore diverso per il piede destro e per il piede sinistro. È impossibile prevedere quale colore avrà in un dato piede in un dato giorno, ma quando vediamo che il primo calzino è rosa, siamo certi che il secondo avrà un colore diverso. L’osservazione di un calzino insieme alla conoscenza delle abitudini di Bertlmann, ci dà immediatamente un’informazione sul secondo. I suoi gusti restano inspiegabili, ma a parte questo non c’è nulle di misterioso. E la questione EPR non è forse la stessa cosa?”

Sistemi composti: stati separabili

Analizziamo alcuni stati quantistici

Consideriamo lo stato ottenuto mediante il seguente circuito:



Lo stato prodotto è il risultato di due preparazioni totalmente indipendenti da parte di A e B, in cui ciascuno utilizza il proprio apparato sperimentale per preparare lo stato fisico.

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_A + |1\rangle_A) \otimes \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle_B - |1\rangle_B)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|0\rangle|0\rangle + |1\rangle|0\rangle - |0\rangle|1\rangle - |1\rangle|1\rangle)$$

Definizione: Uno stato $|\psi\rangle$ è detto *stato prodotto* o *separabile* se possiamo trovare due stati $|\phi\rangle_A$, $|\phi\rangle_B$ rispettivamente negli spazi di Alice e Bob tali che

$$|\psi\rangle = |\phi\rangle_A \otimes |\phi\rangle_B$$

Sistemi composti: stati separabili

Lo stato prodotto è il risultato di due preparazioni totalmente indipendenti da parte di A e B, in cui ciascuno utilizza il proprio apparato sperimentale per preparare lo stato fisico.

Proprio perché le condizioni di normalizzazione valgono indipendentemente, lo stato è separabile

Alice prepara il suo stato: $|\psi\rangle_A = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$

Bob prepara il suo stato: $|\psi\rangle_B = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$

con le rispettive condizioni di normalizzazione

$$\alpha^*\alpha + \beta^*\beta = 1$$

$$\gamma^*\gamma + \delta^*\delta = 1$$

Sistema Alice-Bob: $|\psi\rangle_{AB} = (\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle) \otimes (\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle) = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$

I 4 parametri complessi ne implicano 8 reali. Due però sono eliminati per il vincolo di normalizzazione e due perché la fase globale non ha significato fisico. **In tutto 4 reali**

La caratteristica principale dello stato prodotto è che ogni sottosistema si comporta in modo indipendente dall'altro. Se B compie una misurazione sul suo sottosistema, il risultato è esattamente lo stesso che otterrebbe se il sistema A non esistesse.

Sistemi composti: stati separabili

Esercizio: Dimostrare che lo stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ è separabile. Scriverlo come stato fattorizzato e costruire un circuito in grado di implementare tale stato. Qual è la probabilità che Alice misuri +1? Quale che Bob misuri -1? (Ricordiamo che associamo all'autostato $|0\rangle$ l'autovalore $+1$ e all'autostato $|1\rangle$ l'autovalore -1)

Esercizio: Dimostrare che lo stato $|\psi\rangle = \frac{1}{2}|00\rangle - \frac{1}{2}|01\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$ è separabile. Scriverlo come stato fattorizzato e costruire un circuito in grado di implementare tale stato. Qual è la probabilità che Alice misuri +1 e Bob -1? Quale che misuri -1 e Bob -1?

Operatori di spin: stati separabili

Consideriamo il sistema composto Alice e Bob

Operatori di spin di Alice
nel sistema semplice

$$\Sigma_A = X_A, Y_A, Z_A$$

Operatori di spin di Bob
nel sistema semplice

$$\Sigma_B = X_B, Y_B, Z_B$$

Esercizio: dimostrare in notazione matriciale che

$Z|0\rangle = |0\rangle$ $\quad X|0\rangle = |1\rangle$ $\quad Y|0\rangle = i|1\rangle$

$Z|1\rangle = -|1\rangle$ $\quad X|1\rangle = |0\rangle$ $\quad Y|1\rangle = -i|0\rangle$

Esercizio:
completare la tabella

	$\|00\rangle$	$\|01\rangle$	$\|10\rangle$	$\|11\rangle$
Z_A				
X_A				
Y_A				
Z_B				
X_B				
Y_B				

Operatori di spin di Alice
nel sistema composto a due spin:

$$Z_A \otimes I, X_A \otimes I, Y_A \otimes I$$

Operatori di spin di Bob
nel sistema composto a due spin:

$$I \otimes Z_B, I \otimes X_B, I \otimes Y_B$$

Stiamo sottointendendo che
$Z_A = Z_A \otimes I$ e $Z_B = I \otimes Z_B$

Operatori di spin: stati separabili

Consideriamo il sistema composto Alice e Bob

Operatori di spin di Alice
nel sistema composto a due spin:

$$X_A \otimes I, Y_A \otimes I, Z_A \otimes I$$

Operatori di spin di Bob
nel sistema composto a due spin:

$$I \otimes X_B, I \otimes Y_B, I \otimes Z_B$$

Questo equivale a dire che Alice e Bob possiedono ciascuno il proprio dispositivo sperimentale: quando agiscono gli operatori di spin di Alice quelli di Bob non agiscono e viceversa

In generale infatti:

$$(\Sigma_A \otimes I)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (\Sigma_A |u\rangle \otimes I|v\rangle) = (\Sigma_A |u\rangle \otimes |v\rangle$$

$$(I \otimes \Sigma_B)(|u\rangle \otimes |v\rangle) = (I|u\rangle \otimes \Sigma_B|v\rangle) = (|u\rangle \otimes \Sigma_B|v\rangle$$

In uno stato prodotto ogni predizione sulla metà di Alice è esattamente la stessa che si avrebbe in uno stato a singolo spin; analogamente per Bob.

Per qualsiasi stato di spin esiste una direzione per cui lo spin è +1

$$\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2 + \langle Z\rangle^2 = 1$$

In totale analogia con i sistemi semplici esiste una proprietà definita oggettivamente

$$\langle \Sigma_A \Sigma_B\rangle - \langle \Sigma_A\rangle\langle \Sigma_B\rangle = 0$$

Operatori di spin: stati separabili

Esercizio: sia $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$ mostrare che $\langle X\rangle^2 + \langle Y\rangle^2 + \langle Z\rangle^2 = 1$ e $\langle \Sigma_A \Sigma_B\rangle - \langle \Sigma_A\rangle\langle \Sigma_B\rangle = 0$

Ci serve un ingrediente: come determinare il valore di aspettazione.
Se il valore di aspettazione è 0 allora i due esiti sono equiprobabili!

$$\langle \Sigma \rangle = \langle \psi | \Sigma | \psi \rangle$$

$$\boxed{|\phi\rangle \cdot |\psi\rangle = \langle \phi|\psi\rangle = [\phi_0^*, \phi_1^*] \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \psi_1 \end{bmatrix} = \phi_0^*\psi_0 + \phi_1^*\psi_1}$$

$$\langle \Sigma \rangle = \sum_i \sigma_i \, P(\sigma_i)$$

La media può essere considerata come una somma pesata attraverso la funzione probabilità

$\Rightarrow$

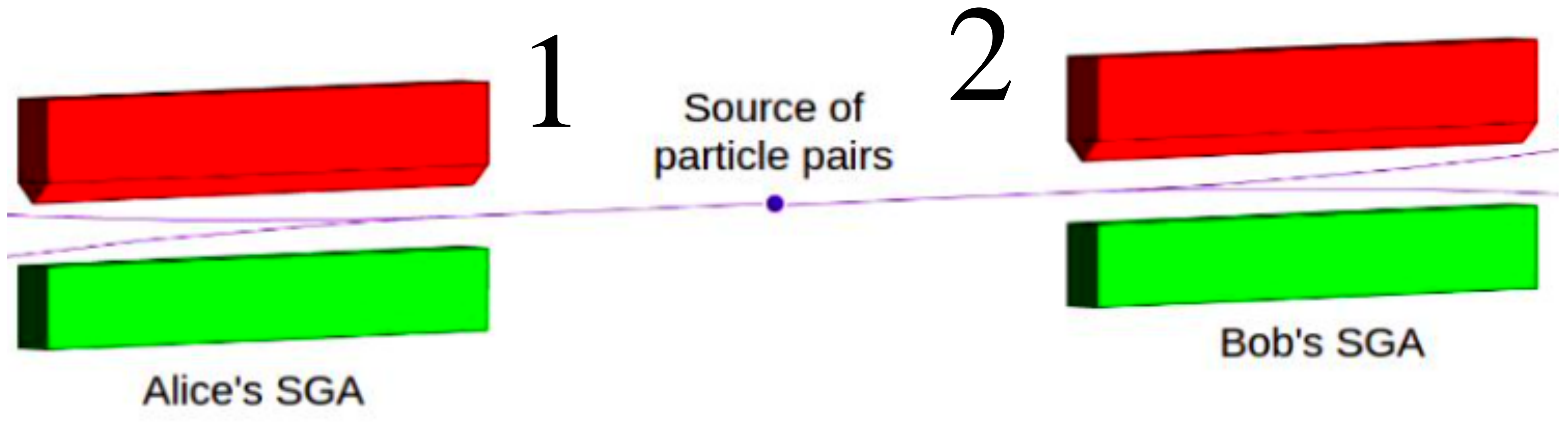
Sperimentalmente questo significa effettuare un gran numero di esperimenti registrando gli esiti. La funzione probabilità è definita sulle osservazioni e identificando $P(\sigma_i)$ con la frazione di osservazioni il cui risultato è σ_i. In questo modo abbiamo una media sperimentale.

$$||$$

$$\langle \Sigma \rangle = \langle \psi | \Sigma | \psi \rangle$$

Operatori di spin: stati separabili

Due elettroni vengono emessi in direzione opposta : 1 con spin-up e 2 con spin-down



$$|\psi_1\rangle = |\uparrow\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = |\downarrow\rangle$$

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$$

Anche in questo caso il prodotto può essere pensato in riferimento ai costituenti:

Stato separabile

Ciascuno dei due elettroni si comporta in modo del tutto indipendente dall'altro se analizzato con uno SG.

$|\psi\rangle$ è lo stato: *un elettrone è in 1 con spin-up* ***e*** *un elettrone è in 2 con spin-down*

Operatori di spin: stati separabili

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$$

$|\psi\rangle$ è lo stato: *un elettrone è in 1 con spin-up* **e** *un elettrone è in 2 con spin-down*

Ciascuno dei due elettroni si comporta in modo del tutto indipendente dall'altro se analizzato con uno SG

Ciascuno dei due costituenti possiede ancora almeno una proprietà

Dal punto di vista probabilistico le correlazioni tra misure sui due sistemi sono quelle che caratterizzano eventi indipendenti

La situazione è analoga alle probabilità classiche per eventi indipendenti

$$P(a,b) = p(a) \cdot p(b)$$

Operatori di spin: stati separabili

$$|\psi\rangle = |\uparrow\rangle_1 \otimes |\downarrow\rangle_2$$

La situazione è analoga alle probabilità classiche per eventi indipendenti (eventi totalmente scorrelati)

$$P(a,b) = p(a) \cdot p(b)$$

Esempio: Stabiliamo la probabilità che il primo elettrone sottoposto a una misura X di uno SG dia +1 **e** il secondo sottoposto ad una misura Z dia -1.

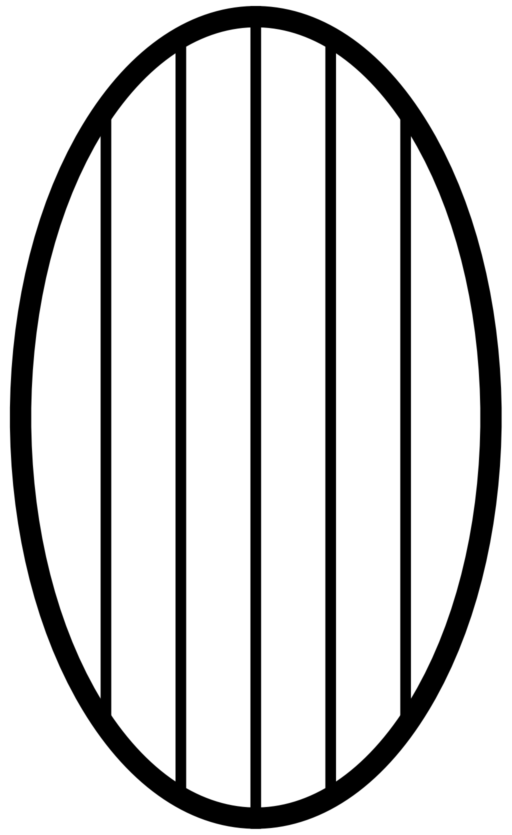
$$p(+1)_X = 0.5$$

$$p(-1)_Z = 1$$

$$\Rightarrow \quad p[(+1)_X, (-1)_Z] = 0.5$$

Operatori di polarizzazione: stati separabili

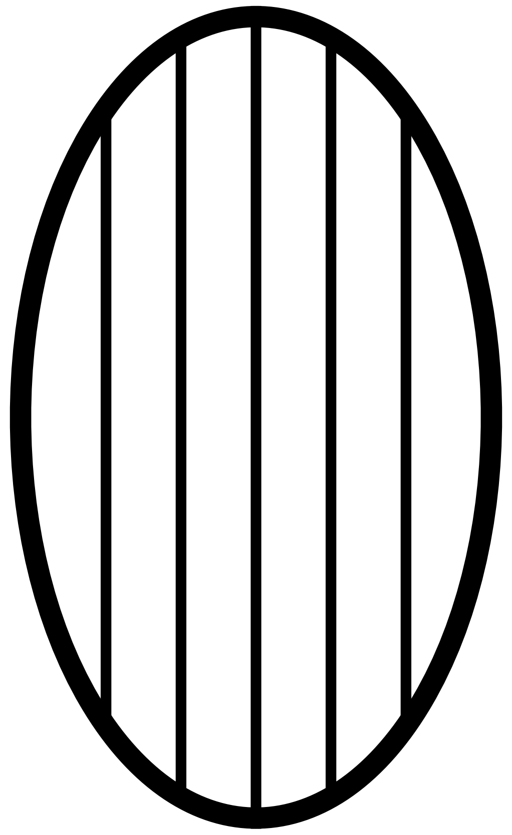
A



S

1 ← ● → 2

B

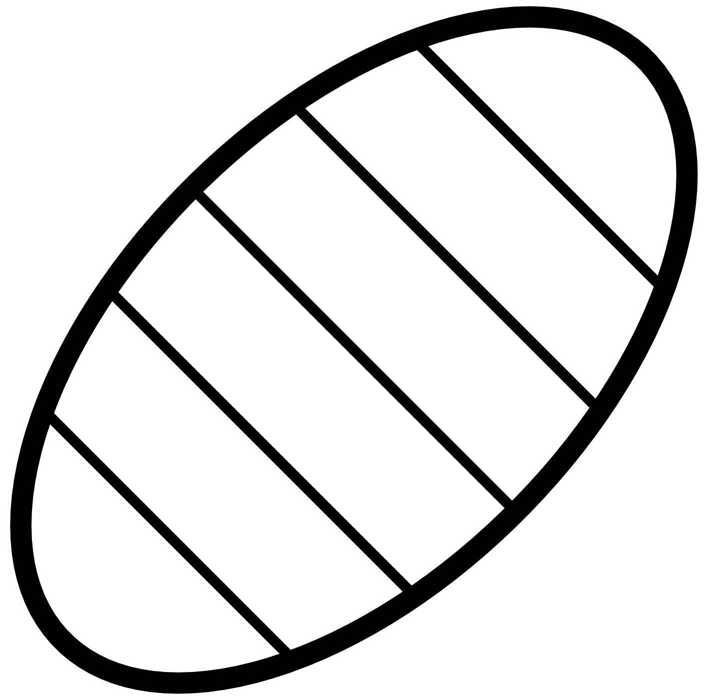


$$|\psi\rangle = |V\rangle_1 |V\rangle_2$$

$$p(2) = p(1) = 1$$

Probabilità che ciascun fotone superi il proprio rispettivo test

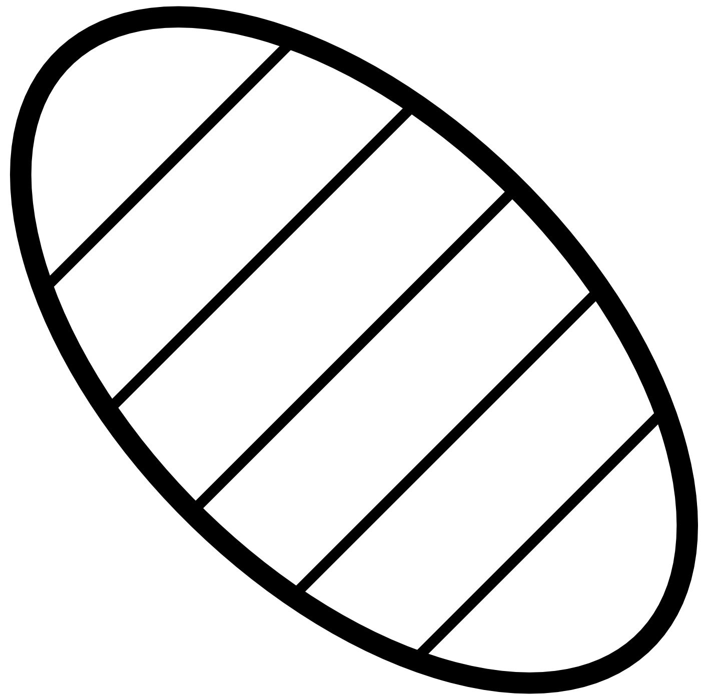
A



S

1 ← ● → 2

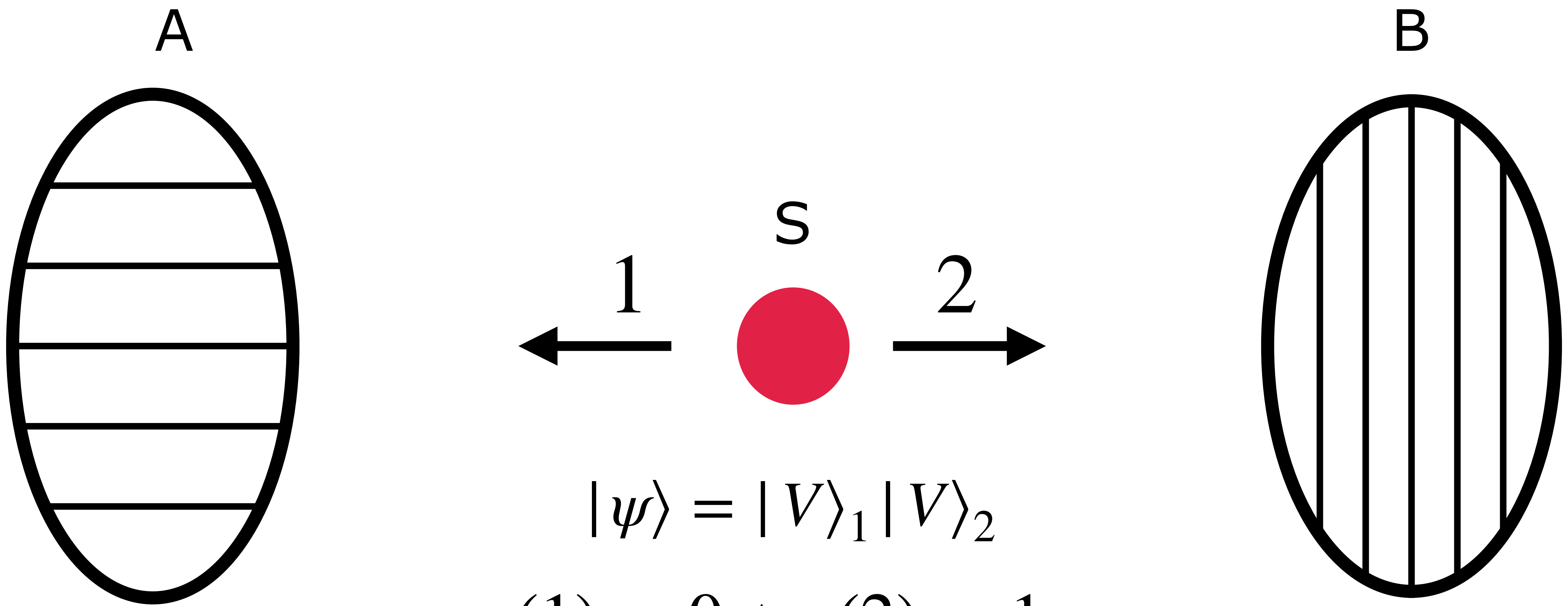
B



$$|\psi\rangle = |V\rangle_1 |V\rangle_2$$

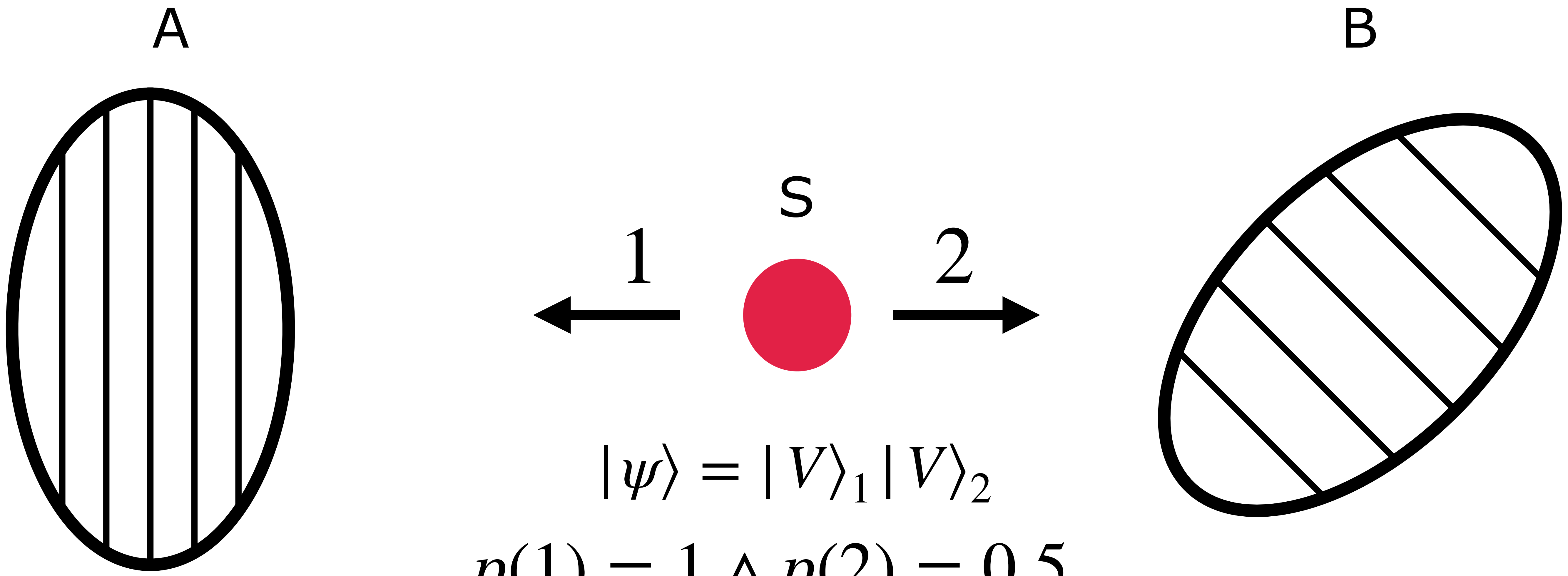
$$p(2) = p(1) = 0.5$$

Operatori di polarizzazione: stati separabili



$$|\psi\rangle = |V\rangle_1 |V\rangle_2$$

$$p(1) = 0 \wedge p(2) = 1$$

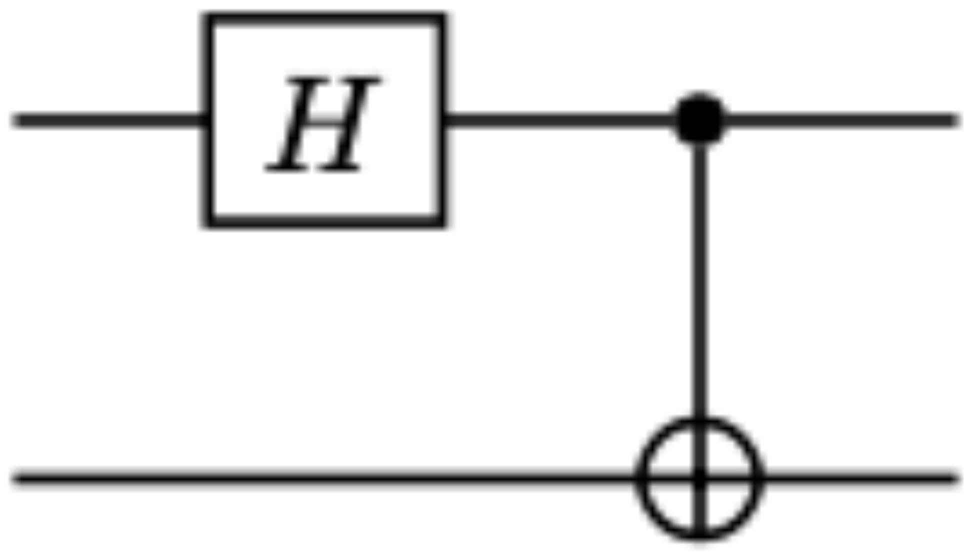


$$|\psi\rangle = |V\rangle_1 |V\rangle_2$$

$$p(1) = 1 \wedge p(2) = 0.5$$

Sistemi composti: stati entangled

Stati di Bell



$$|00\rangle \mapsto |\psi_{00}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle),$$

$$|01\rangle \mapsto |\psi_{01}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |10\rangle),$$

$$|10\rangle \mapsto |\psi_{10}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle - |11\rangle),$$

$$|11\rangle \mapsto |\psi_{11}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle).$$

Cosa c'è di affascinante negli stati massimamente entangled?

A. Uno stato entangled è una descrizione completa del sistema;
B. in uno stato massimamente entangled nulla si conosce dei singoli sottosistemi

I costituenti dello stato non possiedono alcuna proprietà individuale in quanto non esiste nessuna osservabile di spin relativa ad uno qualsiasi di essi di cui si possa prevedere il risultato con certezza. Ovviamente il sistema come un tutto possiede ancora delle proprietà e i costituenti, anche se lontani e non interagiscono, rappresentano un'unità inseparabile, formano un unico sistema, detto appunto ENTANGLED.

Intuitivamente è chiaro perché non sono fattorizzabili, ma come facciamo a dimostrarlo? Per chiarire questo punto entriamo nel dettaglio del formalismo.

Sistemi composti: stati entangled

Gli stati prodotto non sono gli unici che vivono nello spazio composto

$$|\psi\rangle_{AB} = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle$$

Più in generale infatti uno stato avrà la forma (combinazione lineare complessa di elementi della base)

$$|\psi\rangle_{AB} = a|00\rangle + b|01\rangle + c|10\rangle + d|11\rangle$$

Con la conseguente condizione di normalizzazione $a^*a + b^*b + c^*c + d^*d = 1$

e una sola fase globale da ignorare $\longrightarrow$ sei parametri reali $\longrightarrow$ Esistono stati non separabili

$\Downarrow$

STATI ENTANGLED

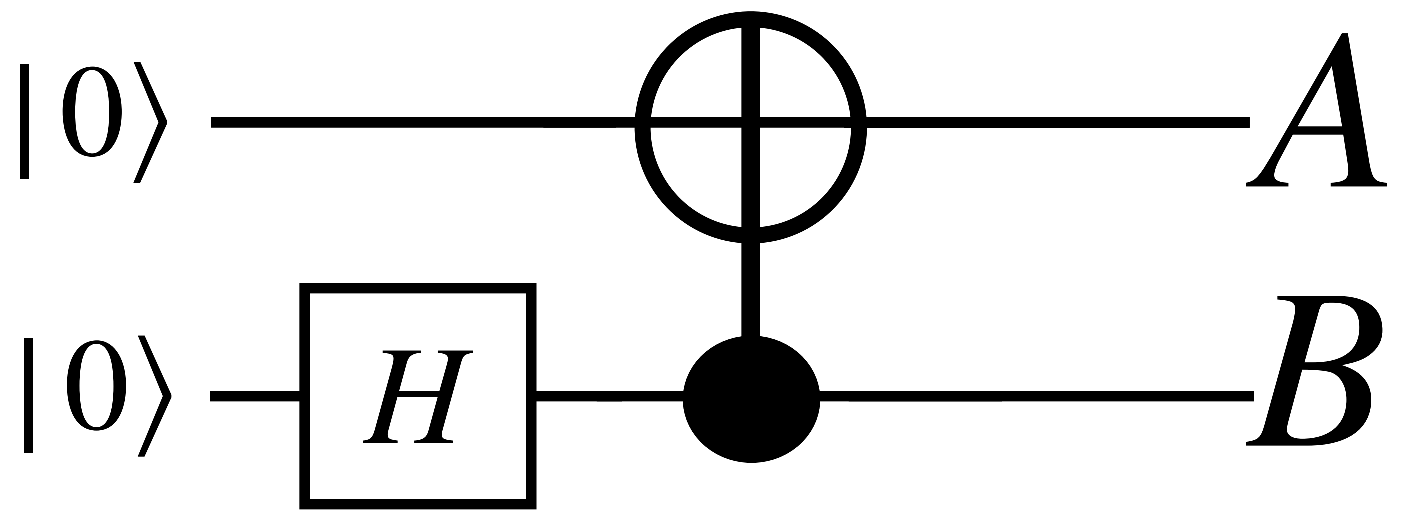
Esistono stati che non possono essere preparati indipendentemente da Alice e da Bob.

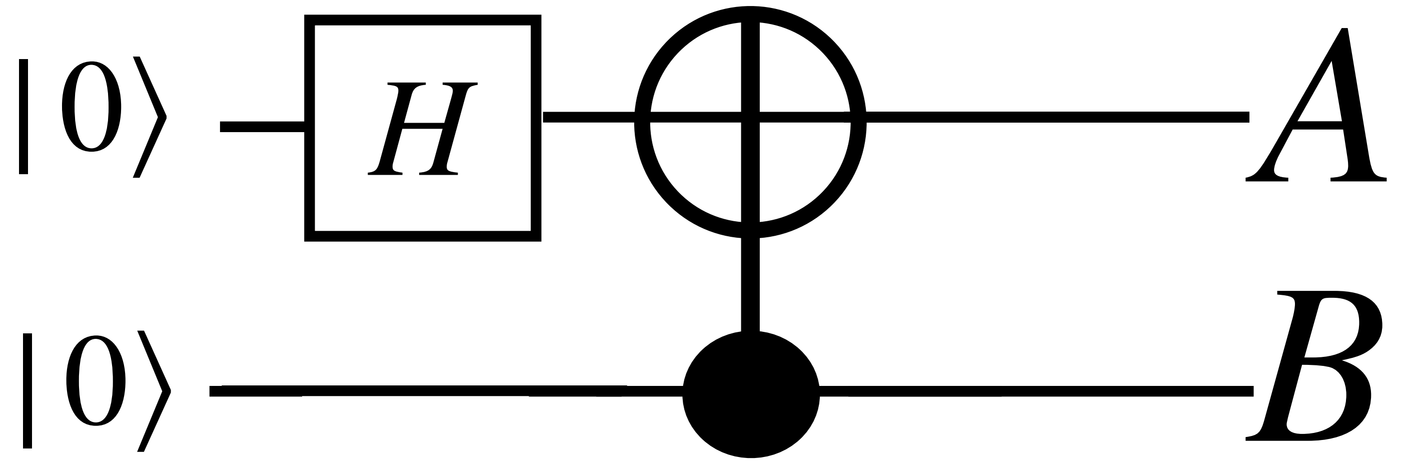
Sistemi composti: stati entangled

Esercizio: Dimostrare che lo stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{2}|10\rangle - \frac{1}{2}|11\rangle$ non è fattorizzabile.

Esercizio: Dimostrare che lo stato $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$ non è fattorizzabile.

Esercizio: Analizzare i seguenti circuiti e stabilire se gli stati in uscita sono entangled

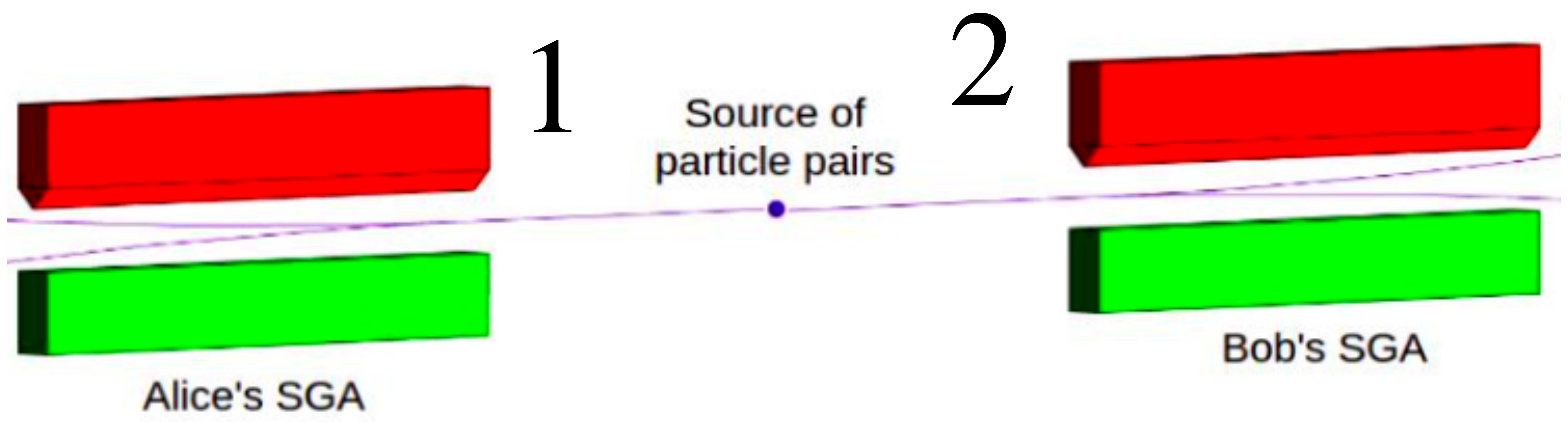




Sistemi composti: stati entangled

Consideriamo una sorgente di elettroni nel stato di Bell:

$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$ (lecito per linearità!)



Per come è fatto lo stato di Bell

$$\boxed{P(\uparrow,\uparrow) = P(\downarrow,\downarrow) = 0 \quad P(\uparrow,\downarrow) = P(\downarrow,\uparrow) = \frac{1}{2}}$$

Totalmente compatibile con il caso classico: potremmo ipotizzare una mistura di stati $|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle$ oppure $|\downarrow\rangle|\uparrow\rangle$.

⬇

Se effettuiamo un test con SG orientati Z gli esiti delle misurazioni sono tali da evidenziare equiprobabilità di trovare entrambe le particelle con *spin-up* o *spin-down*

Sistemi composti: stati entangled

Cosa accade se facciamo una test X ?

$$|\uparrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle) \qquad |\downarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle_1|\downarrow\rangle_2 - |\downarrow\rangle_1|\uparrow\rangle_2)$$

$$\Downarrow$$

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1|-\rangle_2 - |-\rangle_1|+\rangle_2)$$

$$P(+,+) = P(-,-) = 0 \quad P(+,-) = P(-,+) = \frac{1}{2}$$

Totalmente incompatibile con il caso classico: una mistura di stati darebbe equiprobabilità di esiti.

"Va sottolineato che non ci si deve sorprendere che il medesimo stato possa essere espresso in diversi modi. Questo vale del tutto in generale e non ha nulla a che vedere con il fatto che lo stato stesso risulti entangled. Esso è una conseguenza del carattere lineare della teoria, o come si dice tecnicamente, del fatto che gli stati costituiscono uno spazio vettoriale lineare...
Al contrario, il fatto peculiare che lo stato $|\psi\rangle$ assuma esattamente la stessa forma allorché esso sia espresso negli stati della base computazionale o di altri due qualsiasi stati ortogonali, dipende dalla sua particolare forma... La peculiarità dello stato in esame deriva dalla caratteristica dello stato $|\psi\rangle$ di risultare simmetrico per rotazioni, ragion per cui in esso nessuna direzione risulta privilegiata." (Ghirardi,2009)