Quantum superposition

Cosa possiamo imparare misurando lo spin di un elettrone

Filippo Pallotta
Department of Science and High Technology
University of Insubria, Como

Maria Bondani
CNR Institute for Photonics and Nanotechnologies
CNR

Agenda

Esperimento di Stern - Gerlach: perché?

Misurare la proprietà di un oggetto quantistico:
lo spin elettronico

Esperimenti di Stern-Gerlach: prevedere i risultati

Esperimenti di Stern-Gerlach: interpretare i risultati

Strumenti matematici per la misura dello stato di spin elettronico: la matematica a supporto della comprensione del fenomeno

Domande e (possibili) risposte

Analizzare l’esperimento di Stern - Gerlach usando il formalismo dei vettori e della matrici: *perché?*

Esperimento di Stern - Gerlach

Perché prendere in considerazione questo particolare esperimento?

In questo percorso cercheremo di capire in che modo sia possibile ricavare informazioni sullo stato di un oggetto quantistico (elettrone) e di capire in che modo tale informazione cambi nel momento in cui si agisce/opera sullo stato attraverso l'utilizzo di apparati di misura

- Esperimento concettualmente semplice
- Permette di analizzare molti dei principi base di fisica quantistica
- Mostra come i risultati delle misurazioni delle proprietà di oggetti quantistici non sono sempre come potremmo aspettarci.

Uso del formalismo vettoriale e matriciale

Perché usare vettori e matrici per parlare di fisica quantistica?

"Studierà i concetti di vettore, di dipendenza e indipendenza lineare, di prodotto scalare e vettoriale nel piano e nello spazio nonché gli elementi del calcolo matriciale.

Approfondirà inoltre la comprensione del ruolo fondamentale che i concetti dell'algebra vettoriale e matriciale hanno nella fisica."

[Piano degli studi del Liceo Scientifico -Allegato F al Decreto del Presidente della Repubblica 89 del 15 marzo 2010. https://www.miur.gov.it/liceo-scientifico]

- Permette di eseguire dei calcoli utilizzando regole elementari (matrici 2x2, calcolo letterale)
- La fisica quantistica fornisce un contesto significativo per imparare ad usare l'algebra vettoriale

- Linguaggio generale per descrivere in che modo l'informazione legata allo stato quantistico sia modificata dalla successione di operazione di misura alla base degli algoritmi quantistici

Quantum information

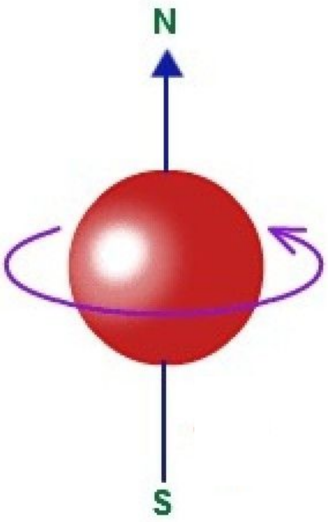
La misura dello spin: l'esperimento di Stern - Gerlach

Lo spin

Lo **spin** dell'elettrone è un grado di libertà interno (una proprietà che può assumere determinati valori) che **non ha analogo classico**.

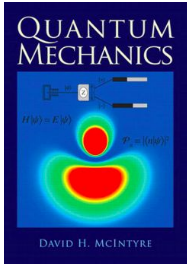
E' una grandezza **vettoriale** e rappresenta un **momento angolare**.

L'elettrone avendo carica elettrica e momento angolare intrinseco possiede un **momento magnetico** assimilabile (classicamente) all'ago di una bussola.



$$\vec{\mu} = -k\frac{e}{2\,m_e}\boxed{\vec{S}}$$

[*Quantum Mechanics - A paradigms approach, McIntyre*]



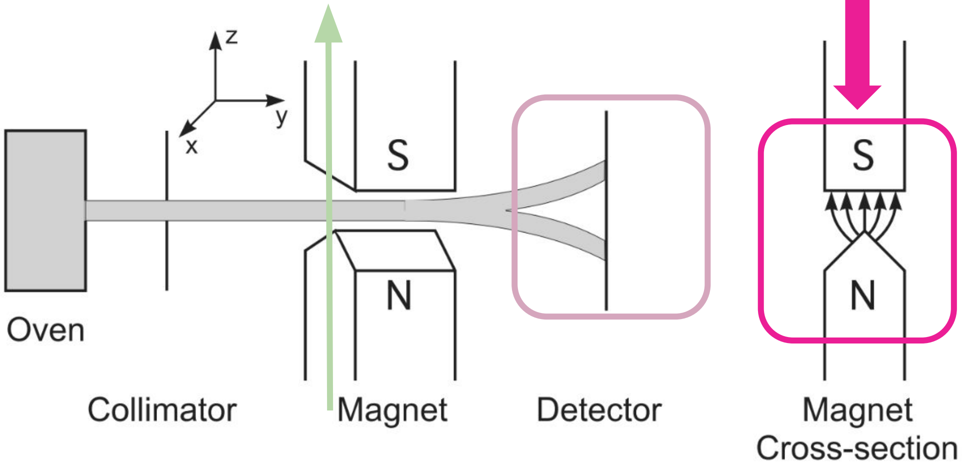
L'esperimento di Stern - Gerlach (1922)

L'esperimento è stato effettuato con **atomi di Argento** il cui comportamento è identico a quello di un singolo elettrone.

Un momento magnetico in un **campo magnetico** **non uniforme** è soggetto a una forza netta che produce una **deflessione**.

$$1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6 4s^2 3d^{10} 4p^6 4d^{10} 5s^1$$

La sorgente di atomi (forno - oven) genera un fascio con **orientazione casuale** del loro momento magnetico.



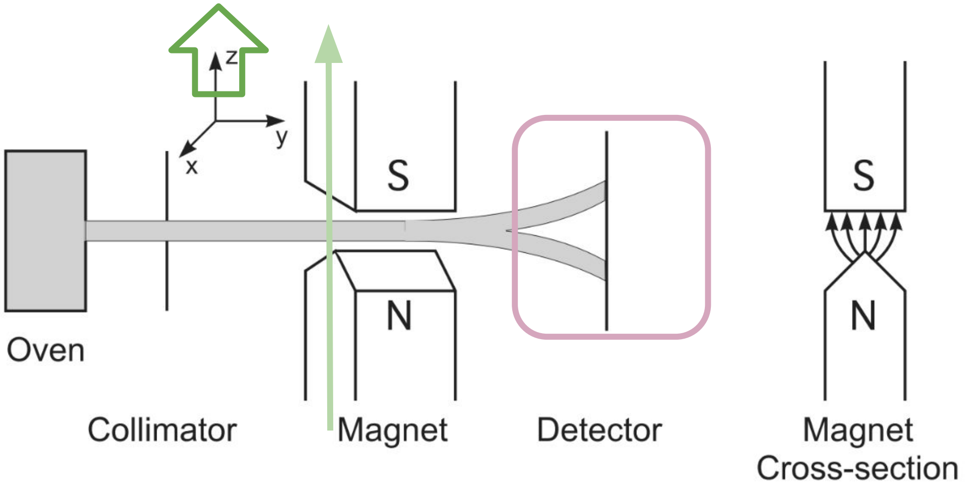
Un momento magnetico (come quello posseduto dall'elettrone) in un **campo magnetico uniforme** è soggetto a un momento torcente che **lo orienta nella direzione del campo.**

L'esperimento di Stern - Gerlach

$$\vec{\mu} = -k\frac{e}{2\,m_e}\boxed{\vec{S}}$$

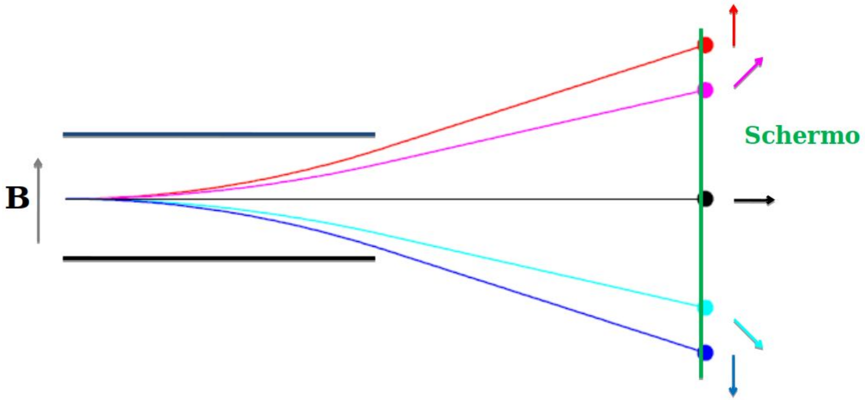
$$F_z = \frac{\partial}{\partial z}(\vec{\mu}\cdot\vec{B}) \simeq -k\frac{e}{2m_e}S_Z\frac{\partial B}{\partial z}$$

La deflessione del fascio di elettroni è quindi una misura della componente S_Z dello spin lungo l'asse Z (che è la direzione che definisce l'orientamento del gradiente di campo magnetico.)



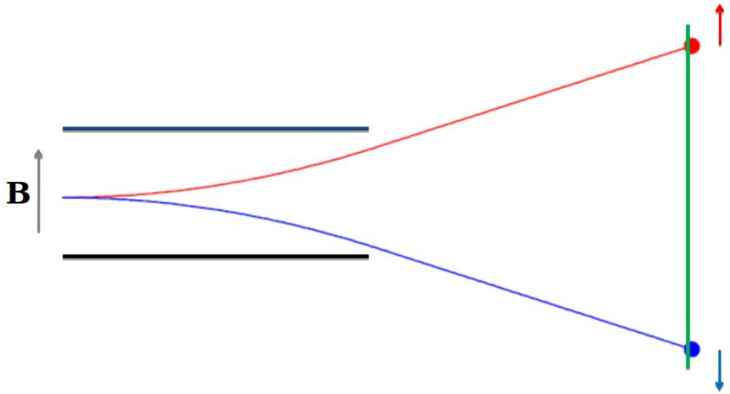
Previsione classica e risultato sperimentale

La previsione classica



La misura della deflessione permette di conoscere la componente del momento magnetico nella direzione del campo.

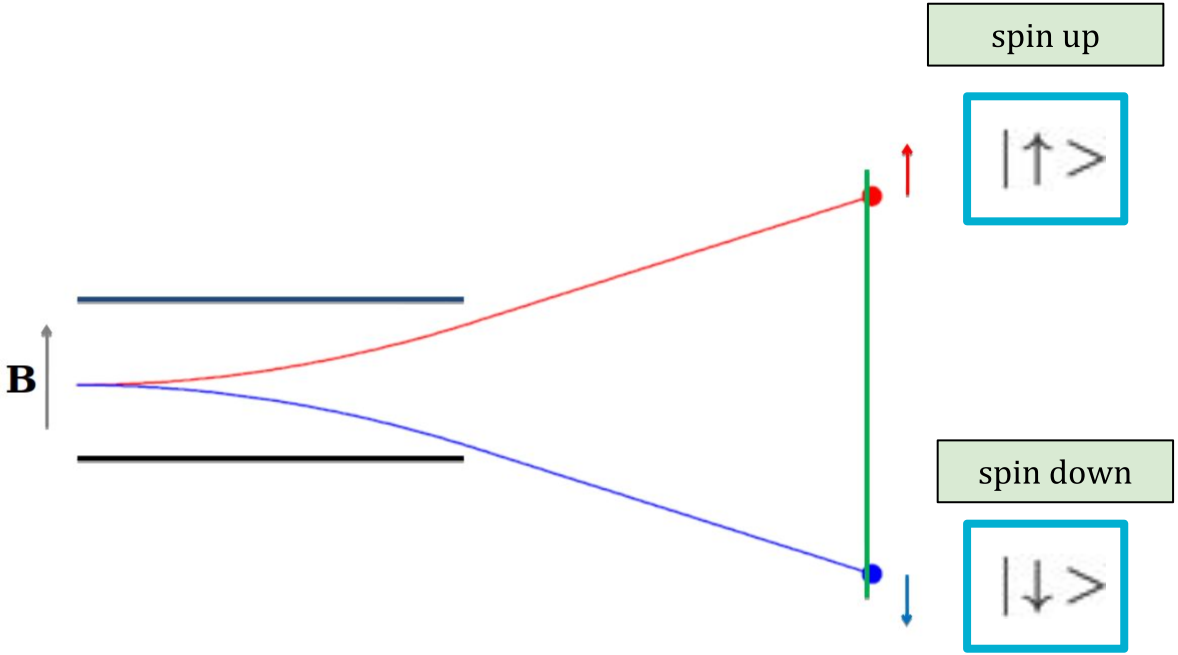
risultato dell'esperimento



L'esperimento mostra sempre e solo due possibili valori per qualunque componente del momento magnetico.

Cosa abbiamo imparato?

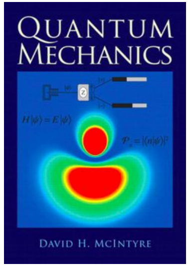
la quantizzazione della componente del momento magnetico (e angolare) nella direzione del campo: il fascio di atomi viene infatti deflesso dal campo magnetico non uniforme in due possibili direzioni



informazione sull'oggetto quantistico attraverso la misura

Il grado di libertà di spin nella direzione Z può assumere solo due stati distinti.

Queste due possibilità sono classicamente alternative e incompatibili



Postulato 1

Fisica Quantistica

[*Quantum Mechanics - A paradigms approach, McIntyre*]

Lo stato di un oggetto quantistico racchiude tutte le informazioni che possiamo avere su tale oggetto.

Lo stato di un oggetto quantistico si descrive tramite il simbolo

$$|\Psi>$$

Stato e informazione

Lo stato racchiude tutta l'informazione ("*quello che possiamo sapere*") relativa all'oggetto quantistico (*elettrone*).

Adesso capiamo come l'informazione si trasformi a seconda di come si trasforma lo stato quando si interagisce con l'oggetto quantistico eseguendo una misura.

Esperimenti

L'obiettivo di questa attività è evidenziare lo scarto tra interpretazione classica e quantistica dei fenomeni relativi agli oggetti quantistici.

La necessità di evidenziare questo scarto è uno degli obiettivi di competenza settoriale previsti nei liceo per lo studio della fisica moderna

"Saper mostrare, facendo riferimento a esperimenti specifici, i limiti del paradigma classico di spiegazione e interpretazione dei fenomeni e saper argomentare la necessità di una visione quantistica."

[Quadro di riferimento LSOSA 2015]

Agire sullo stato di un elettrone

Un apparato di Stern - Gerlach è in grado di agire sullo stato di spin di un elettrone.

L'apparato esegue una misura della componente dello spin elettronico lungo una determinata direzione (nel nostro caso Z e X)

Come lavoreremo insieme

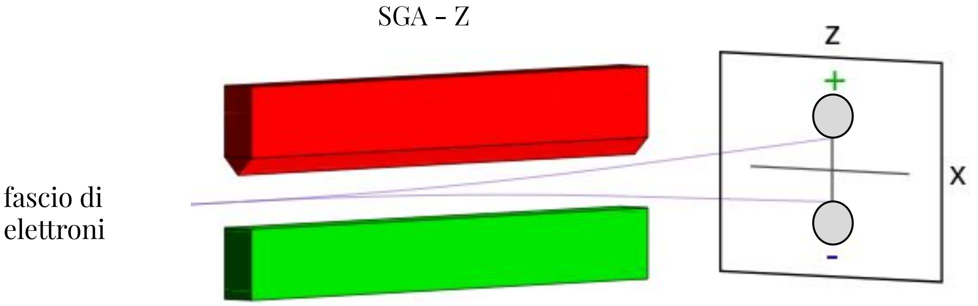
- Vi presentiamo una serie di esperimenti in cui si misurano le componenti dello spin di un elettrone usando diverse combinazioni di apparati di Stern - Gerlach
- Vi chiederemo di fare una previsione sui risultati di ciascun esperimento
- Alla fine verificheremo le previsioni usando un simulatore

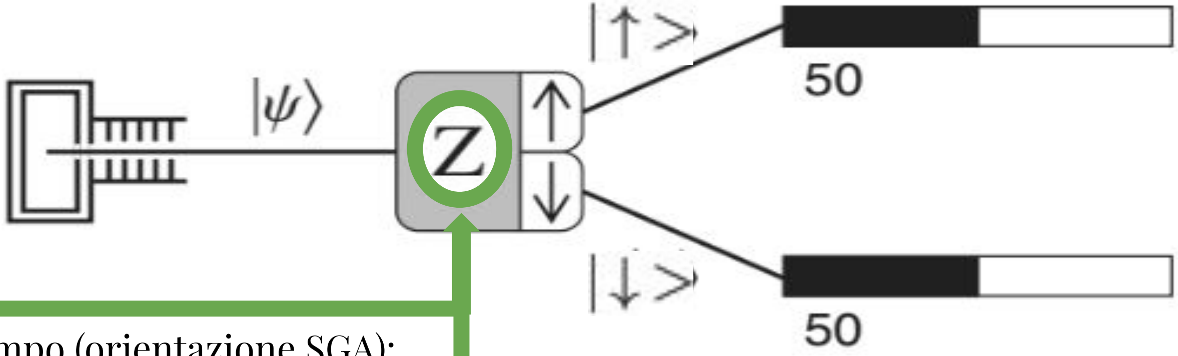
Esempio

In quale punto gli elettroni colpiranno lo schermo?
Con quale frequenza?

Esperimento 1

Statisticamente il 50% dei conteggi sarà spin up e il 50% sarà spin down nella direzione di orientazione del campo (Z).

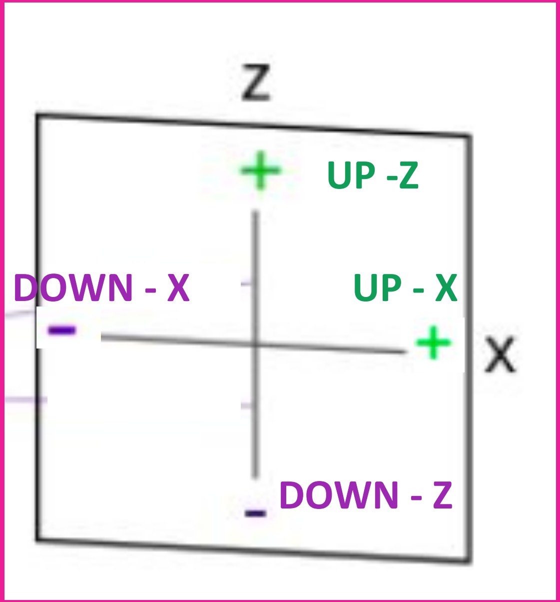




direzione del campo (orientazione SGA): direzione lungo cui avviene la misura

Esercizio: Prevedi il risultato

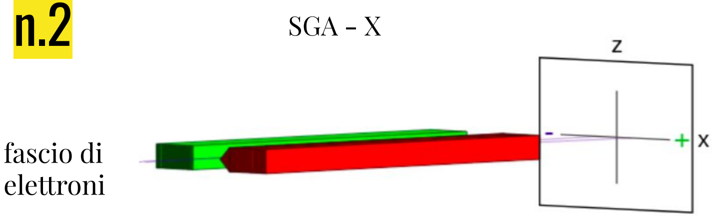
In quale punto gli elettroni colpiranno lo schermo?
Con quale frequenza?



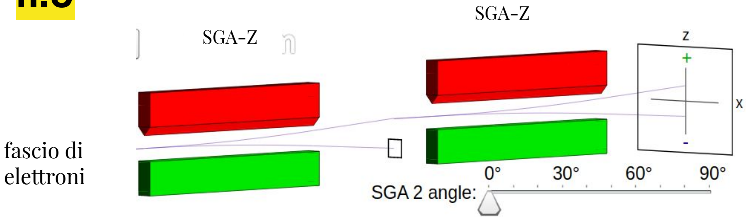
Esperimenti

In quale punto gli elettroni colpiranno lo schermo?
Con quale frequenza?

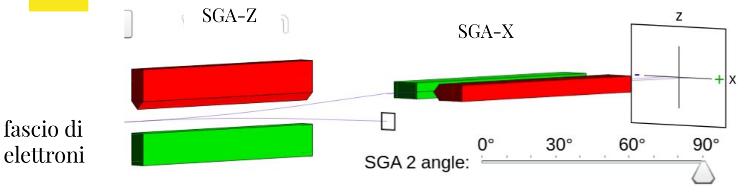
n.2



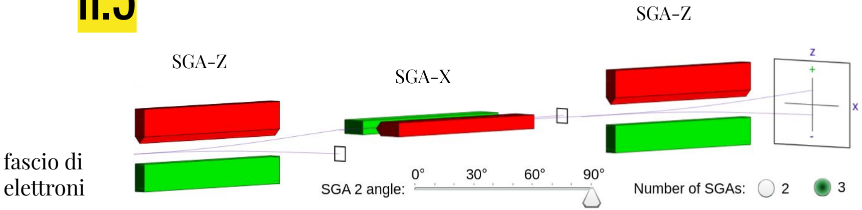
n.3



n.4



n.5

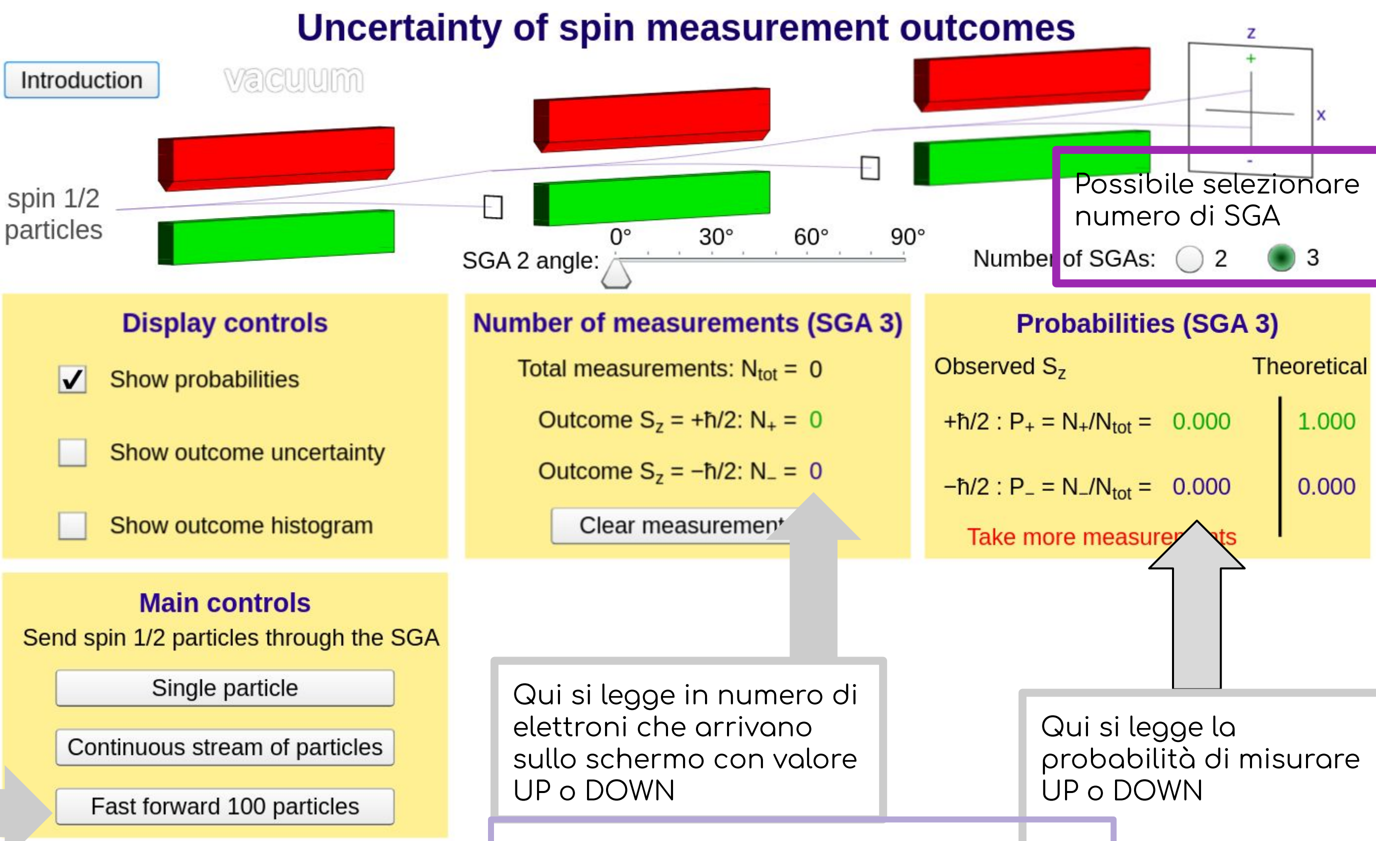


Verifica delle previsioni

Simulator

QuVis

[Measurement Outcome Uncertainty]



Possibile selezionare numero di SGA

È possibile inviare pacchetti di 100 elettroni alla volta ed incrementare la statistica con più lanci

Qui si legge in numero di elettroni che arrivano sullo schermo con valore UP o DOWN

Qui si legge la probabilità di misurare UP o DOWN

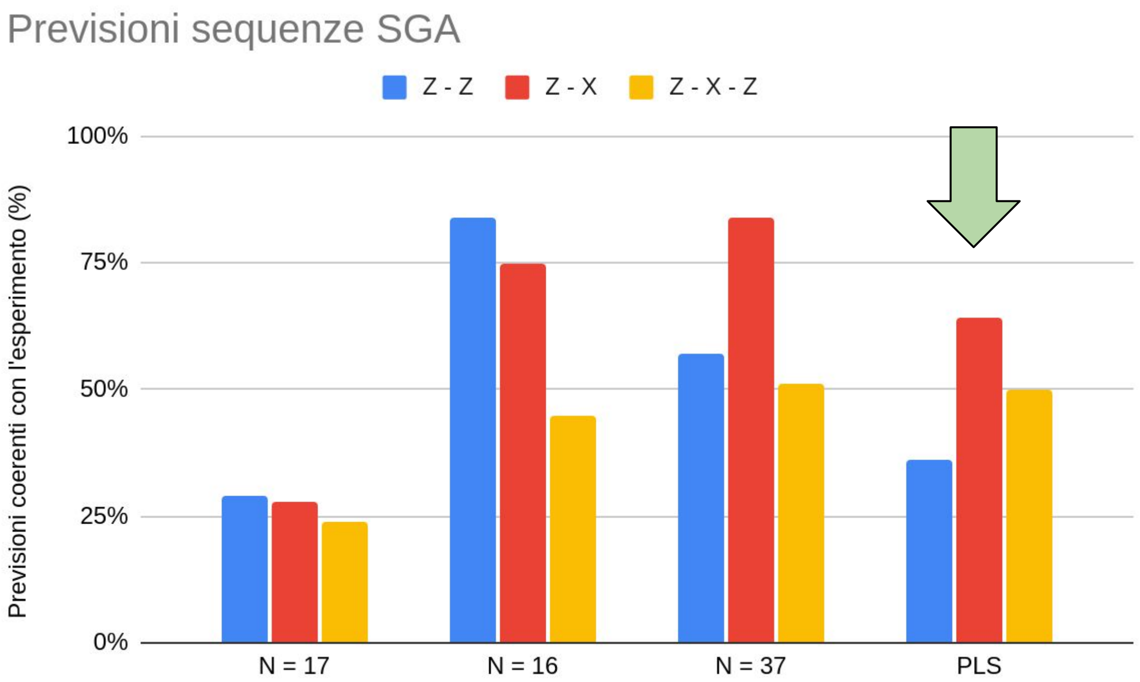
N_{tot} si riferisce al numero totale di elettroni che sono arrivati sullo schermo, non sul numero totale di quelli lanciati

Risultati sperimentazione

L'attività sulla previsione delle misure con sequenze di SGA è stata sperimentata con tre gruppi di studenti in tre contesti diversi.

Riporto nell'ultima serie le previsioni raccolte durante l'incontro.

La riflessione principale da attivare in classe riguarda le argomentazioni relative alle diverse previsioni ("*spiega perché*" ovvero "*in virtù di quale modello interpretativo hai fatto quella scelta?*") per evidenziare lo scarto tra i paradigmi interpretativi classici e quantistici.



La necessità di riflettere in classe su questo tipo di scarto fa parte degli obiettivi didattici previsti per l'insegnamento della fisica moderna

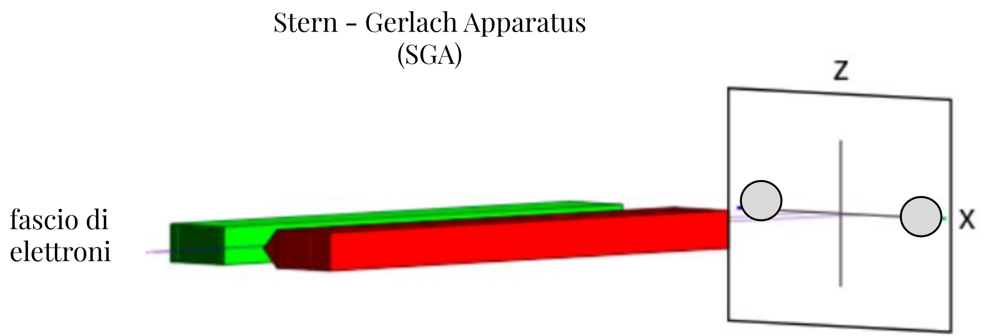
"Saper mostrare, facendo riferimento a esperimenti specifici, i limiti del paradigma classico di spiegazione e interpretazione dei fenomeni e saper argomentare la necessità di una visione quantistica." [Quadro di riferimento LSOSA 2015]

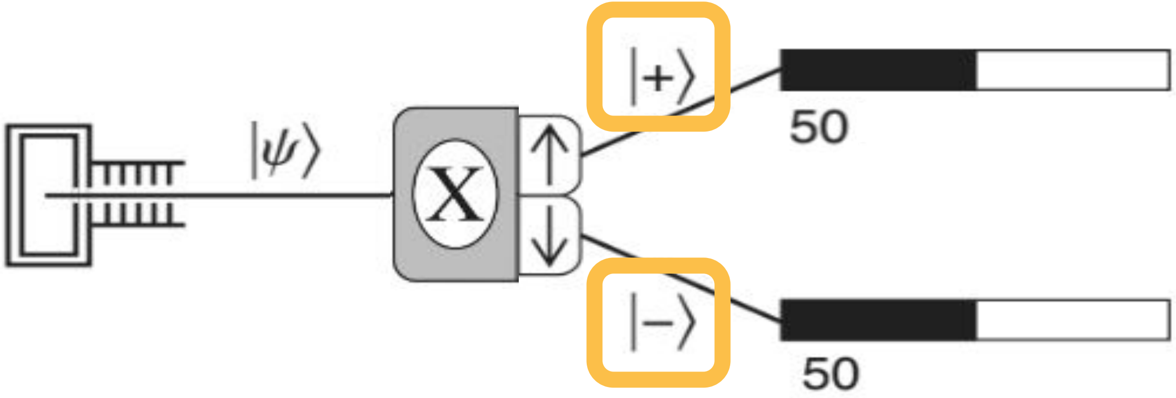
Esperimento 2

Il grado di libertà di spin in una data direzione può assumere solo due stati distinti (alternativi e incompatibili)

Naturalmente questo vale qualunque direzione si scelga per il campo magnetico.

Se il campo è diretto lungo l'asse x gli stati saranno | + > e | - >



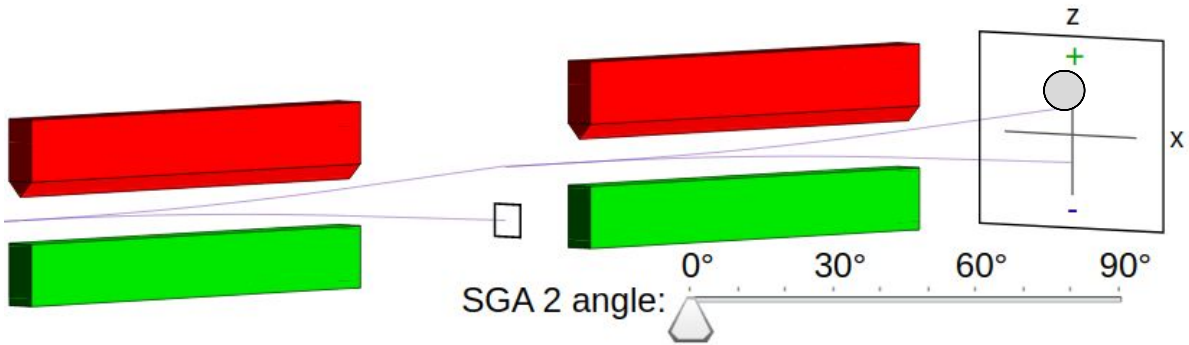


Esperimento 3

Il primo SGA si prepara l'oggetto con uno spin con un valore specifico in una specifica direzione (nell'esempio lungo Z con valore UP)

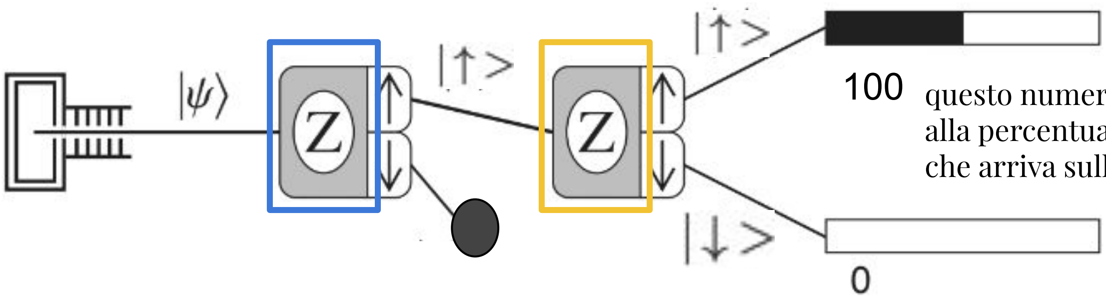
Il secondo SGA si misura nella stessa direzione (Z)

Quale sarà il risultato della misura?



prepara

misura



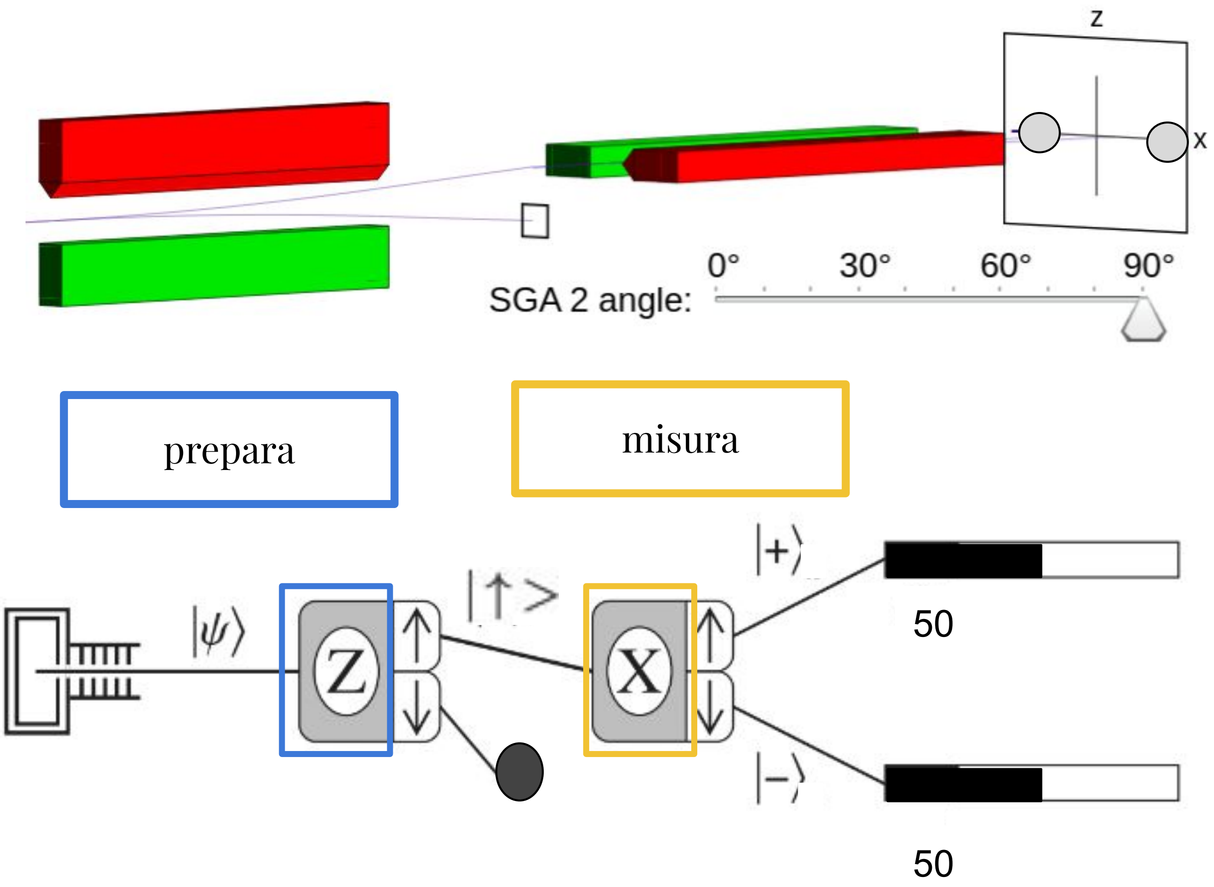
questo numero si riferisce alla percentuale di elettroni che arriva sullo schermo

Esperimento 4

Il primo SGA si prepara l'oggetto con uno spin con un valore specifico in una specifica direzione (nell'esempio lungo Z con valore UP)

Il secondo SGA si misura nella direzione (X)

Quale sarà il risultato della misura?

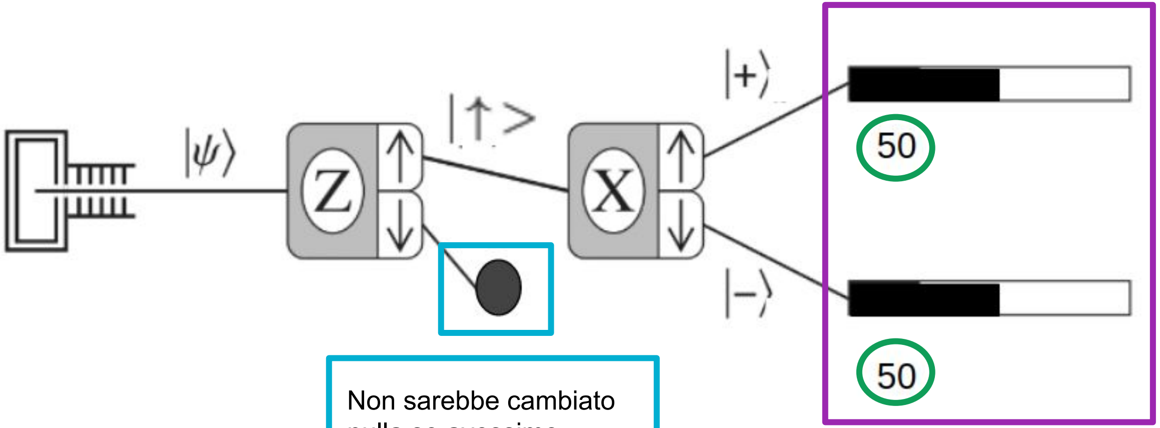


Natura probabilistica della misura

Cosa abbiamo imparato?

a) La misura dello spin ha sempre come risultato una coppia di valori, indipendentemente dallo stato in ingresso.

b) La natura probabilistica (statistica) della meccanica quantistica.

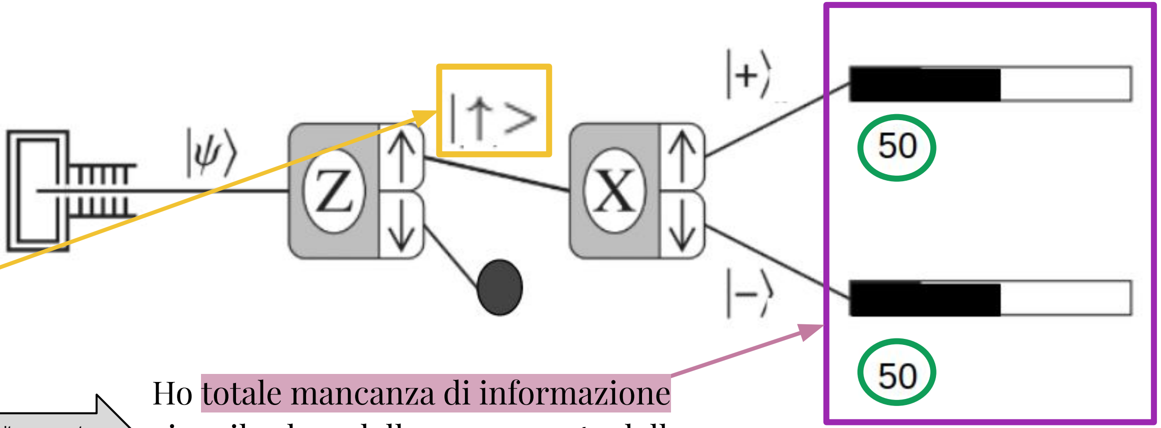


Non sarebbe cambiato nulla se avessimo considerato come ingresso al secondo SGA

Ci sono sempre due possibili valori distinti per la misura

Relazione di indeterminazione

Cosa abbiamo imparato?



Ho informazione certa circa il valore della componente dello spin lungo la direzione Z

simultaneamente

Ho totale mancanza di informazione circa il valore della componente dello spin lungo la direzione X

... ne parliamo in dettaglio dopo ...

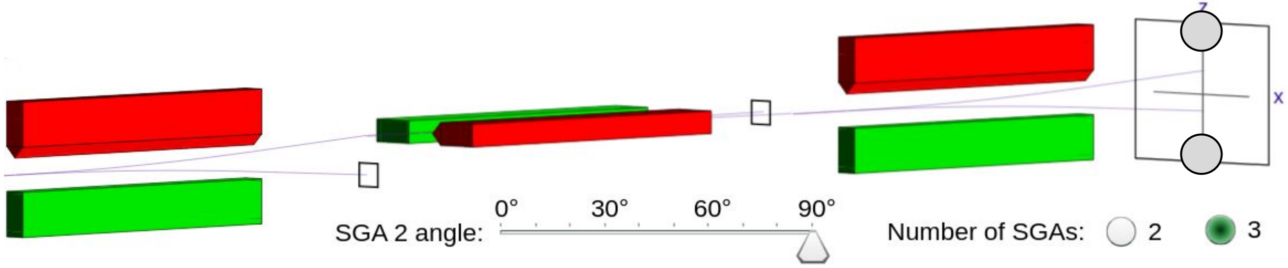
S_Z e S_X sono osservabili non compatibili

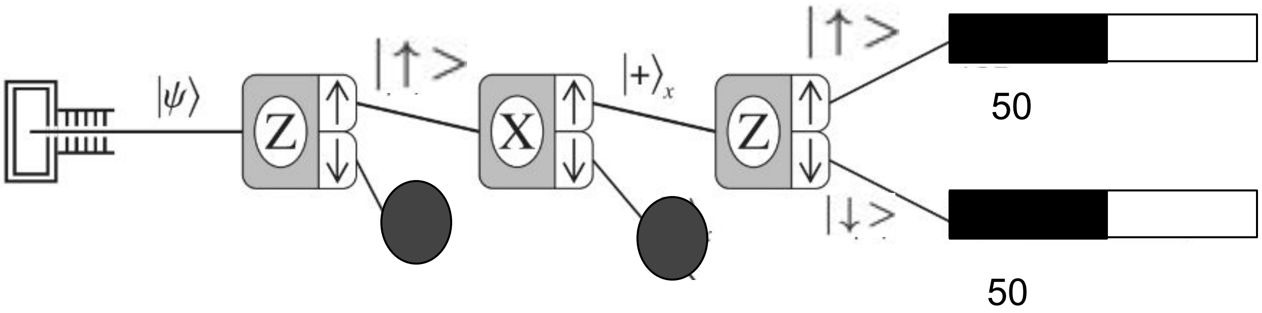
Esperimento 5

Il primo SGA si prepara l'oggetto con uno spin lungo Z con valore UP.

Il secondo SGA si prepara nella direzione (X UP)

Il terzo SGA misura nella direzione (Z)





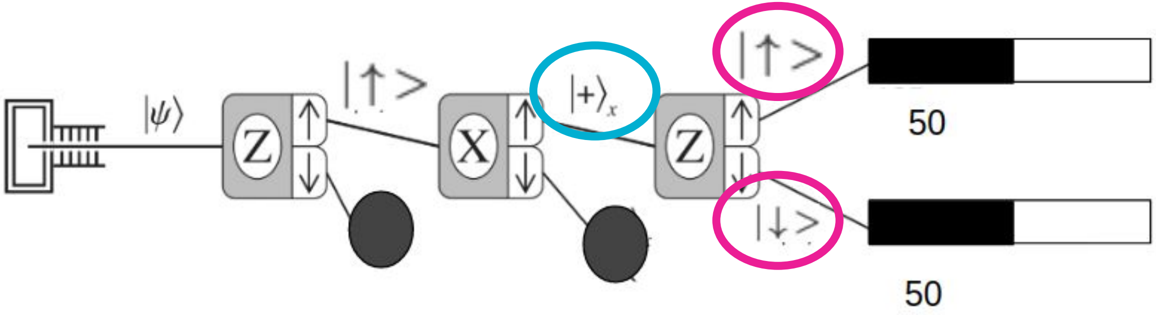
Come è fatto lo stato $| + >$

Cosa abbiamo imparato?

Lo stato quantistico $| + >$
include gli stati

$$|\uparrow> \quad e \quad |\downarrow>$$

con uguale peso.



Costruendo uno stato in cui lo spin è ben definito e orientato lungo X, la componente Z dello spin assume sempre e solo due possibili valori. Pensando di fare l'esperimento con singoli atomi, dobbiamo concludere che lo stato di uno spin orientato lungo x si può scrivere come la sovrapposizione dei due stati (classicamente incompatibili)

$$|+> = a\,|\uparrow> + \,b\,|\downarrow>$$

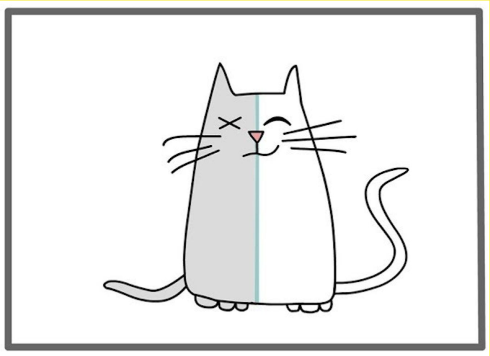
definire lo stato a partire dall'esperimento

Sfruttiamo il risultato dell'esperimento e l'ipotesi della sovrapposizione per definire la relazione tra stati Z e stati X

Stato quantistico di sovrapposizione

La meccanica quantistica ammette la possibilità di avere stati di sovrapposizione scritti come combinazioni lineari di stati “classici”

$$|+> = a\,|\uparrow> + b\,|\downarrow>$$



Relazione tra | ↑ > e | + >

I pesi ***a*** e ***b*** sono in generale numeri (complessi) che hanno il significato di ampiezze di probabilità di trovare il sistema sullo stato | ↑> e |↓>

$$|+> \, = a\,|\uparrow> + \, b\,|\downarrow>$$

$$P_{\uparrow} = |a|^2 \text{ e } P_{\downarrow} = |b|^2$$

$$|a|^2 + |b|^2 = 1 \Rightarrow a = \pm b$$

$$P_{\uparrow} = P_{\downarrow}$$

$$\boxed{|+> \, = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow> + \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow>}$$

$$\boxed{|-> \, = \frac{1}{\sqrt{2}}|\uparrow> - \frac{1}{\sqrt{2}}|\downarrow>}$$

Ma è proprio necessario tirare in ballo la sovrapposizione per interpretare correttamente i risultati sperimentali?

Possibili interpretazioni alternative

miscela

Il fascio di elettroni che viene misurato lungo l'asse X

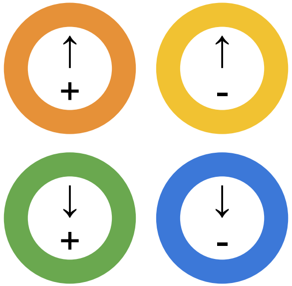
è composto da una miscela di:

elettroni $|\uparrow\rangle$, $|+\rangle$

elettroni $|\uparrow\rangle$, $|-\rangle$

elettroni $|\downarrow\rangle$, $|+\rangle$

elettroni $|\downarrow\rangle$, $|-\rangle$



mutuamente esclusivi

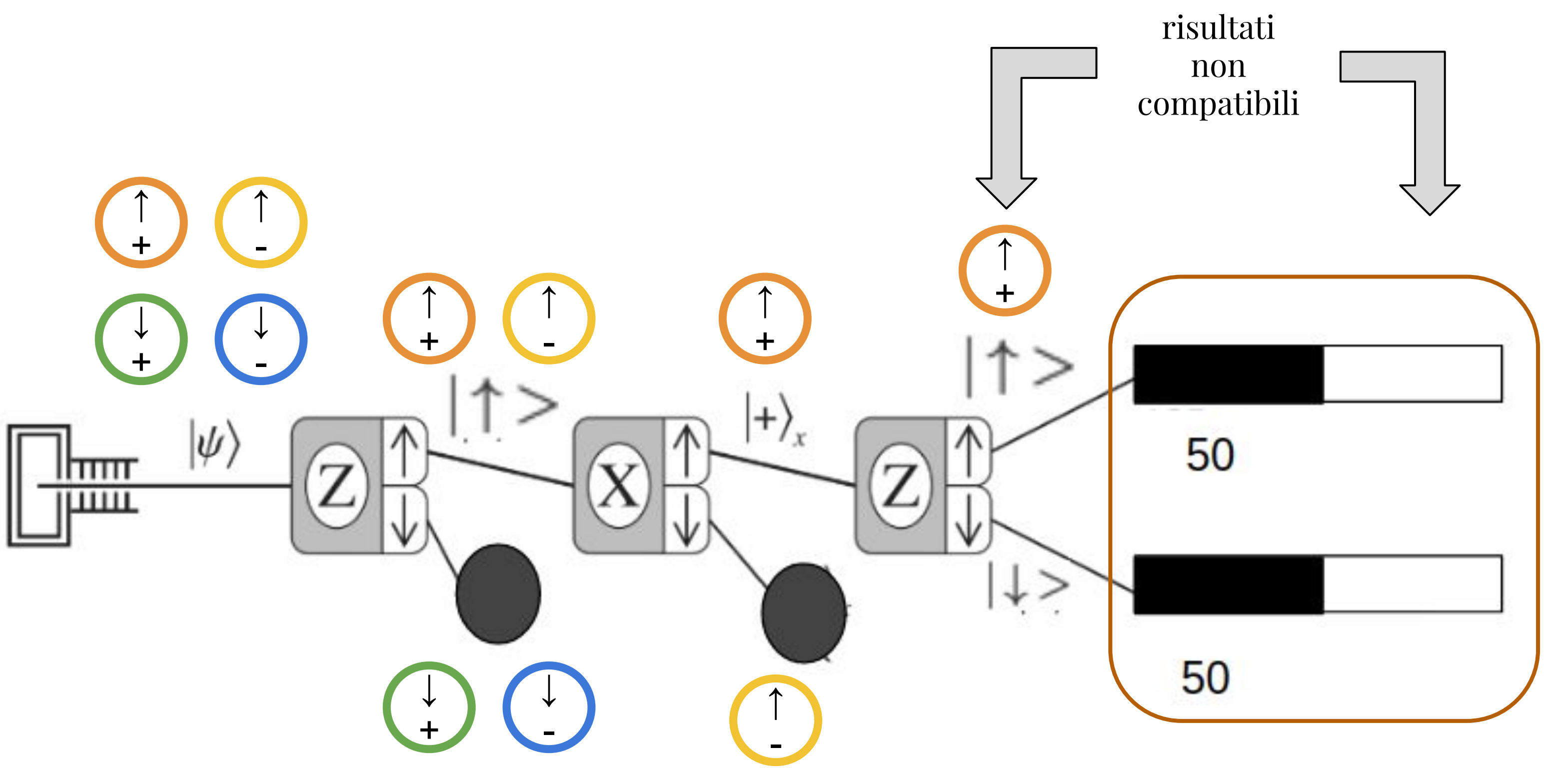
sovrapposizione

Lo stato di spin del singolo elettrone lungo l'asse X

è dato da una sovrapposizione dei due stati (classicamente incompatibili)

$|\uparrow>$ e $|\downarrow>$

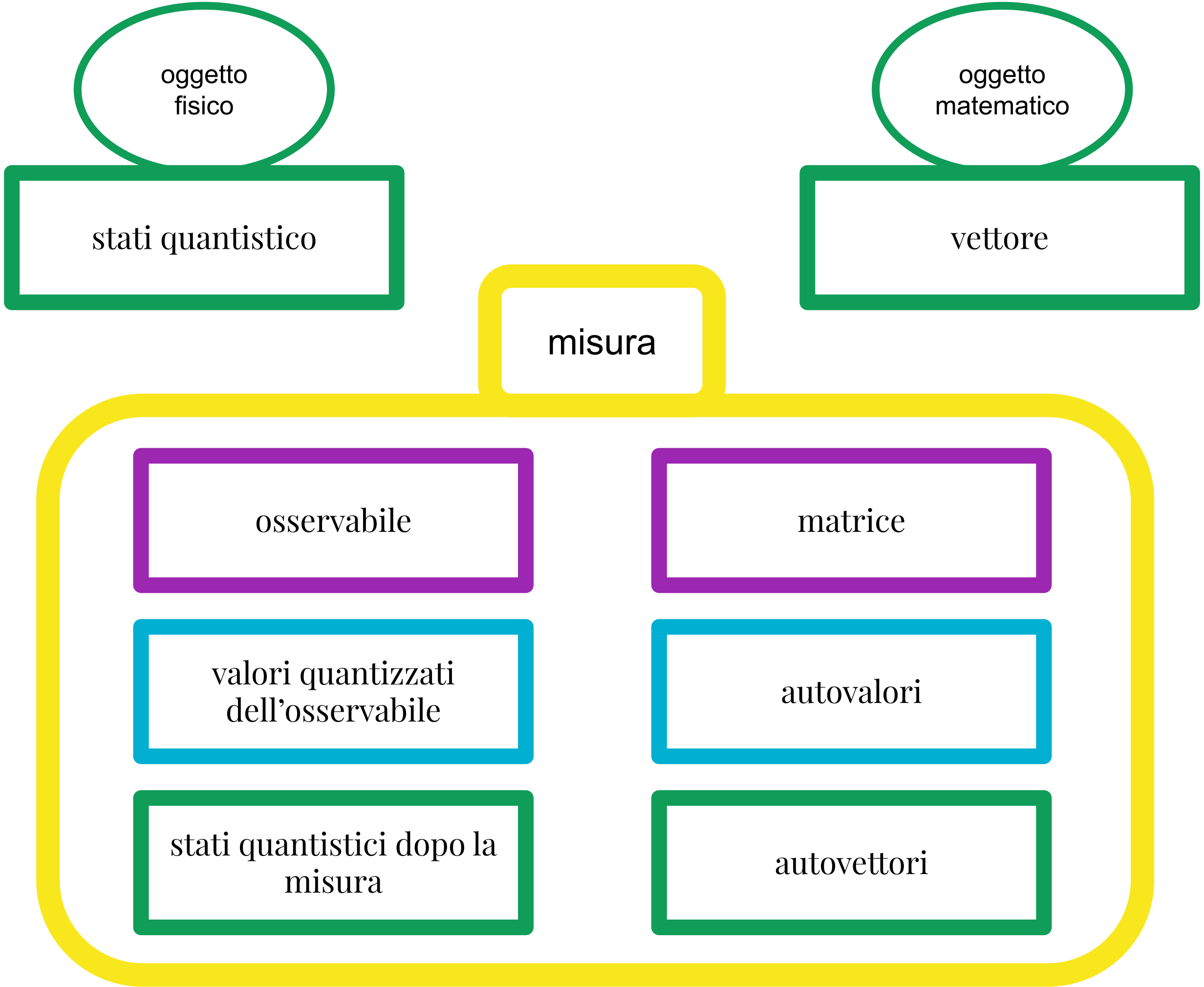
Dimostrazione che non è miscela



Fisica e matematica: osservabili e matrici

osservabile, valore, stato

Se a una certa osservabile (ad esempio la componente z dello spin) associo una determinata matrice (ad esempio la matrice σ_z) posso interpretare gli autovalori della matrice come i possibili valori (quantizzati !) dell'osservabile e gli autovettori come quei particolari coefficienti che definiscono i corrispondenti stati quantistici.


oggetto fisico
stati quantistico
oggetto matematico
vettore
misura
osservabile
matrice
valori quantizzati dell'osservabile
autovalori
stati quantistici dopo la misura
autovettori

Stato - vettore

$$a\,|\uparrow> + \,b\,|\downarrow>$$

generico stato del singolo grado di libertà di spin (informazione sullo spin dell'elettrone)

codificato in

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$a = 1$ e $b = 0$

$$|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

spin up

$a = 0$ e $b = 1$

$$|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

spin down

vettore (complesso) a due componenti normalizzato

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

Questi due vettori rappresentano i due stati di spin che si ottengono dopo una misura della componente Z dello spin (autovettori della matrice che rappresenta la misura lungo Z)

Matrice, autovettori e autovalori

Una matrice (2X2) è costituita da 4 numeri (complessi):

$$\sigma = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix}$$

che definiscono una ben precisa regola di trasformazione di un vettore:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}a + s_{12}b \\ s_{21}a + s_{22}b \end{pmatrix}$$

In generale nessun vettore viene lasciato inalterato da una matrice σ ma per ogni matrice esistono sempre **due** particolari vettori (**autovettori**) la cui "direzione" viene mantenuta:

$$\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Dove s è uno specifico numero reale (**autovalore**)

Esercizio 1

Legame oggetto quantistico e oggetto matematico

In questo caso verifichiamo come sono fatti gli stati relativi alla misura della componente Z dello spin

Misura della componente Z dello spin e matrice σ_Z

Componente Z dello spin $\xleftrightarrow{\text{associo}}$ $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

osservabile

matrice

I cui autovettori sono i vettori che rappresentano i due possibili stati di spin che si ottengono misurando la componente Z dello spin

$$\sigma_Z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

le soluzioni di questa equazione forniscono gli autovalori (valore misurato dell'osservabile) che si associano a ciascun autovettore (stato di spin)

Componente Z dello spin e matrice σ_Z (verifica)

$$\sigma_Z \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

le soluzioni di questa equazione forniscono gli autovettori (valore misurato dell'osservabile) che si associano a ciascun autovettore (stato di spin)

autovettori

$$\boxed{|\uparrow\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{s = 1}$$

$$\boxed{|\downarrow\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{s = -1}$$

autovalori

misura degli oggetti quantistici

osservabile	Componente Spin lungo la direzione Z	$\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	matrice
valori quantizzati dell'osservabile	Valore spin "UP" misurato lungo Z	$s = 1$	autovalori
stati quantistici dopo la misura	Stato di spin Z - "UP"	$\lvert\uparrow> = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	autovettori

Esercizio 2

Legame oggetto quantistico e oggetto matematico

In questo caso ricaviamo i valori e gli stati relativi alla misura della componente X dello spin elettronico

Esercizio

Determinare gli autovalori e autovettori della matrice che corrisponde alla componente X dello Spin.

Verificare che:

a) i valori che possono assumere le componenti dello spin sono quantizzati
b) i valori delle componenti dello spin sono gli stessi
c) lo stato di spin | + > risulta effettivamente scritto come combinazione lineare (con uguali pesi) degli stati | ↑ > e | ↓ >

Nel caso della matrice $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Gli autovalori si ottengono risolvendo l'equazione $\sigma_x \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Ricordando la regola generale $\begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} \\ s_{21} & s_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}a + s_{12}b \\ s_{21}a + s_{22}b \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ cioè $\begin{cases} b = s\,a \\ a = s\,b \end{cases}$ le cui soluzioni sono due:

$$|a|^2 + |b|^2 = 1$$

$\boxed{s = 1 \quad \text{con} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$ $\boxed{s = -1 \quad \text{con} \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$

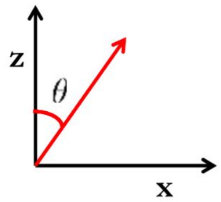
$$\boxed{|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \qquad \boxed{|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |\uparrow\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |\downarrow\rangle$$

Strumento matematico per esplorare la fisica

Una volta in grado di usare il formalismo è possibile esplorare delle situazioni più complesse, ad esempio andando a misurare la componente lungo una direzione θ.

Esercizio 3



Consideriamo la matrice corrispondente alla componente dello spin nella direzione θ

$$\sigma(\theta) = \cos\theta\,\sigma_z + \sin\theta\,\sigma_x = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$$

a) trovare gli autovalori che corrispondono i i valori che possono assumere le componenti dello spin in quella direzione: sono quantizzate?

b) trovare gli autovettori corrispondenti: sono ancora esprimibili come una sovrapposizione degli stati | ↑ > e | ↓ >. I pesi sono uguali?

c) Qual è la probabilità di misurare uno spin UP nella direzione θ ?

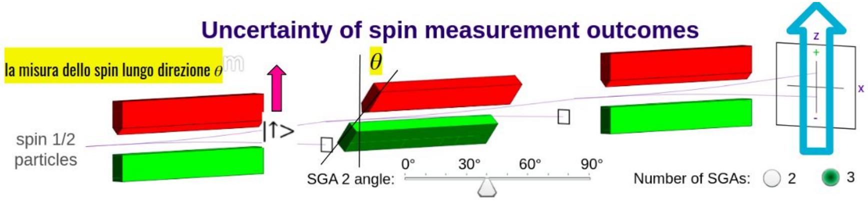
$$s = 1 \quad \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \qquad\qquad s = -1 \quad \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} \\ -\cos\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$$

$$P_\uparrow = \cos^2\frac{\theta}{2} \qquad P_\downarrow = \sin^2\frac{\theta}{2} \qquad\qquad P_\uparrow = \sin^2\frac{\theta}{2} \qquad P_\downarrow = \cos^2\frac{\theta}{2}$$

una <u>proposta</u> di risoluzione dell'esercizio è nella appendice

Risultati dell’esercizio 3 si possono ricavare anche con un esperimento simulato

Esperimento simulato



Il secondo SGA è ruotato di un angolo θ. Scriviamo la componente dello spin nella direzione di θ come sovrapposizione di stati (come fatto nell'Esperimento 5).

Con il simulatore è possibile trovare la probabilità di misurare spin Z up (| **a** |²).

Da questo ricavare i coefficienti della sovrapposizione (**a**)

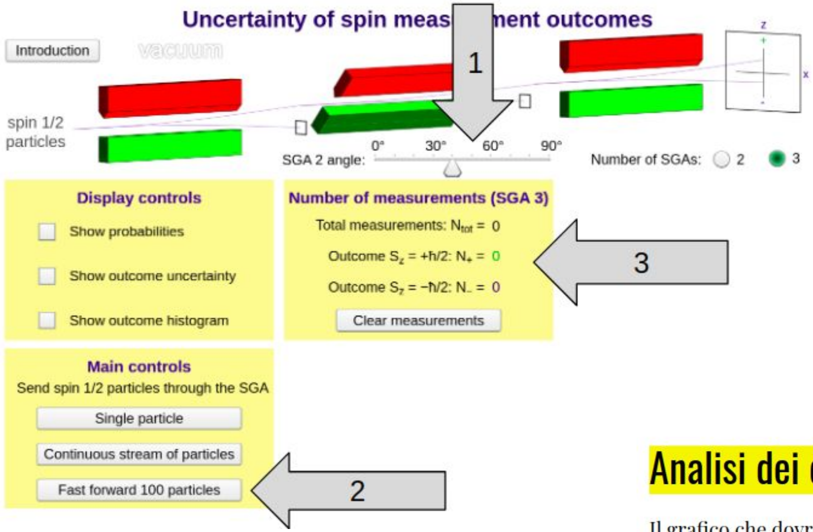
Sono i coefficienti il cui quadrato fornisce la probabilità di misurare lungo la direzione θ_+ o θ_-

$$|\theta\rangle = \boxed{a}\,\boxed{|\uparrow\rangle} + \boxed{b}\,\boxed{|\downarrow\rangle}$$

lo stato di spin dell'oggetto quantistico lungo la direzione **positiva** definita da Z_+

lo stato di spin dell'oggetto quantistico lungo la direzione **negativa** definita da Z_-

In base all'esperimento che hai condotto, quali sono i coefficienti?



angolo (°)	N_{tot}	N_+	N_-	P_+	P_-
0°					
10°					
....					
90°					

Esperimento simulato

$$P(\,|\uparrow\rangle\,) = |a|^2$$

Analisi dei dati - P_+

Il grafico che dovresti ottenere è simile a quello riportato a destra.

Quale relazione matematica si può stabilire tra **P (| ↑ >)** e l'angolo $\boldsymbol{\theta}$

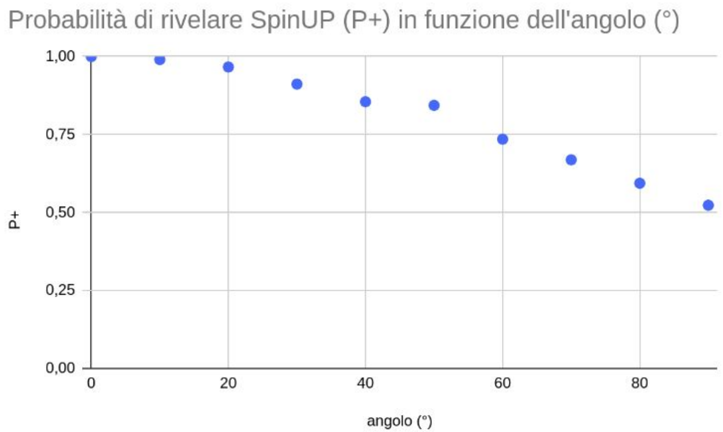
A. P (| ↑ >) ≈ $\cos(\theta)$

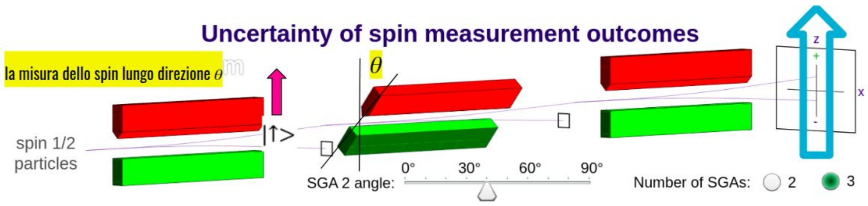
B. P (| ↑ >) ≈ $\cos^2(\theta)$

C. P (| ↑ >) ≈ $\mathrm{sen}^2(\theta)$

D. P (| ↑ >) ≈ $\cos^2(2\theta)$

E. $\boxed{\text{P (| ↑ >) ≈ } \cos^2(\theta/2)}$





Esperimento a casa

Il secondo SGA è ruotato di un angolo θ. Scriviamo la componente dello spin nella direzione di θ come sovrapposizione di stati (come fatto nell'Esperimento 5).

Sono i coefficienti il cui quadrato fornisce la probabilità di misurare lungo la direzione θ_+ o θ_-

$$|\theta\rangle = \boxed{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \boxed{|\uparrow\rangle} + \boxed{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} \boxed{|\downarrow\rangle}$$

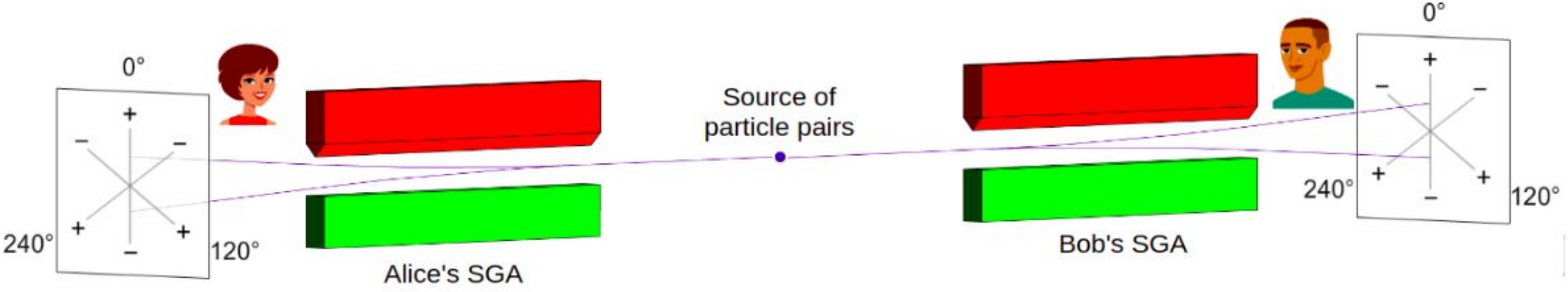
lo stato di spin dell'oggetto quantistico lungo la direzione **positiva** definita da Z_+

lo stato di spin dell'oggetto quantistico lungo la direzione **negativa** definita da Z_-

In base all'esperimento che hai condotto, quali sono i coefficienti?

Bell's test

Risultati dell'esercizio 3 (o analogamente dell'esperimento simulato) si possono usare per affrontare il tema dell'entanglement e delle disuguaglianze di Bell



$$P_{\uparrow} = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Nell'esperimento di Bell, Alice e Bob scelgono di misurare lo spin in direzioni diverse.
Le previsioni dei risultati delle loro misurazioni si possono confrontare con le previsioni del modello EPR

La relazione di indeterminazione

Misure incompatibili

$$\sigma(\theta)=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix} \qquad s=1 \quad\Rightarrow\quad |\uparrow\rangle_\theta=\begin{pmatrix}\cos\frac{\theta}{2}\\ \sin\frac{\theta}{2}\end{pmatrix} \qquad s=-1 \quad\Rightarrow\quad |\downarrow\rangle_\theta=\begin{pmatrix}\sin\frac{\theta}{2}\\ -\cos\frac{\theta}{2}\end{pmatrix}$$

Per valori diversi di θ, gli autovettori delle matrici $\sigma(\theta)$ sono diversi.
Questo significa che i valori dello spin in direzioni diverse non possono essere misurati contemporaneamente con precisione assoluta.

La ragione matematica è che le matrici non commutano, ovvero

$$[\sigma(\theta_1),\sigma(\theta_2)]=\sigma(\theta_1)\sigma(\theta_2)-\sigma(\theta_2)\sigma(\theta_1)\neq 0$$

In particolare per σ_x e σ_z

$$\sigma_x\sigma_z=\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos(0) & -\sin(0)\\ \sin(0) & \cos(0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \sigma_z\sigma_x=\begin{pmatrix}\cos(0) & -\sin(0)\\ \sin(0) & \cos(0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

Misure incompatibili

$$\sigma(\theta_1)\sigma(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\sin\theta_2 - \sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 - \cos\theta_1\sin\theta_2 & \cos\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_1\sin\theta_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & -\sin(\theta_1 - \theta_2) \\ \sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

$$\neq$$

$$\sigma(\theta_2)\sigma(\theta_1) = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 - \theta_2) & \sin(\theta_1 - \theta_2) \\ -\sin(\theta_1 - \theta_2) & \cos(\theta_1 - \theta_2) \end{pmatrix}$$

Relazione di indeterminazione

Se due grandezze fisiche X e Y sono rappresentate da operatori che non commutano, esiste una relazione fra l'indeterminazione minima con cui possono essere misurate

$$\Delta X \Delta Y \geq \frac{1}{2}\left|\langle [X, Y] \rangle\right|$$

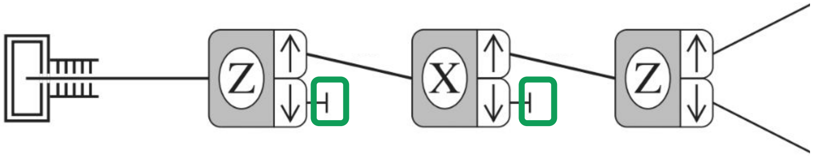
Informazione e misura

Misurare è avere informazione certa

Cosa succede allo stato quantistico (quindi all'informazione connessa all'oggetto quantistico che attraversa la sequenza di apparati) in relazione al fatto che possiamo scegliere di misurare o no all'uscita di ognuno degli apparati.

Sequenza SGA ZXZ

In questa parte analizziamo la sequenza di apparati di Stern Gerlach ZXZ che abbiamo visto prima.



Durante l'esperimento abbiamo deciso di bloccare uno dei canali in uscita nei primi due SGA.

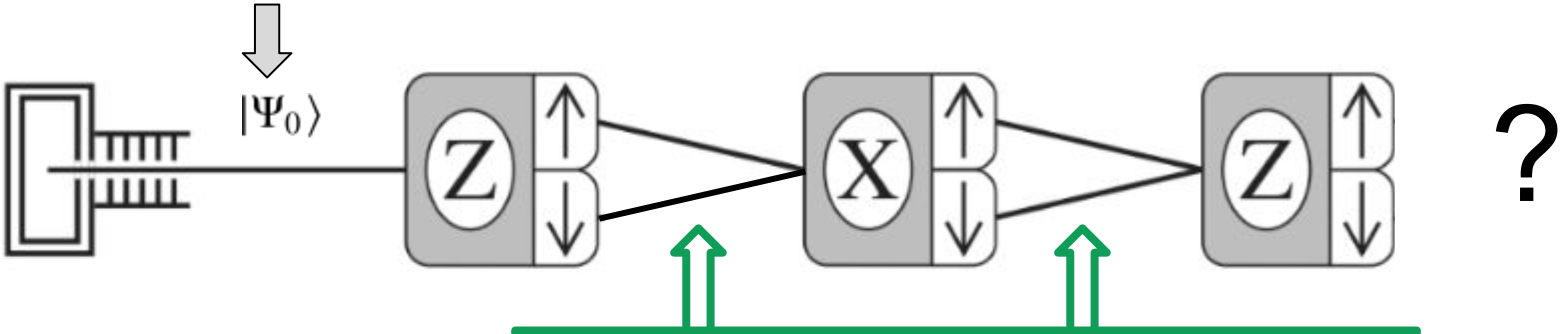
Questo significa che sappiamo (informazione certa) quale tipo di stato entra nell'SGA successivo.

Possedere questo tipo di informazione equivale a dire che abbiamo misurato lo stato in uscita dall'SGA

In base al risultato della misura abbiamo dunque scelto quale oggetto fare entrare nell'SGA successivo

Cosa succede se non misuriamo?

entra uno stato generico



non effettuiamo alcuna selezione del fascio, ovvero non misuriamo lo stato in uscita dagli SGA

Usiamo il formalismo

Per analizzare la sequenza usiamo il formalismo degli operatori.

Ogni SGA corrisponde a una matrice che esegue un'operazione sullo stato

Noi sappiamo cosa succede ogni volta che un particolare SGA agisce sull'elettrone perché sappiamo cosa succede quando la matrice associata all'operatore agisce sul vettore che rappresenta lo stato

Unica accortezza è riscrivere gli stati in una base che permetta di rendere semplice il calcolo

$$SGA - Z \iff \sigma_z$$

$|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle$ sono i due autovettori della matrice σ_z cioè sono due stati che non sono modificati dall'azione della matrice.

Per la linearità dell'operatore anche una qualunque combinazione lineare dei due stati non è modificata dalla matrice, ovvero:

dato $|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$

allora $|\Psi_1\rangle = \sigma_z|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$

$$SGA - X \iff \sigma_x$$

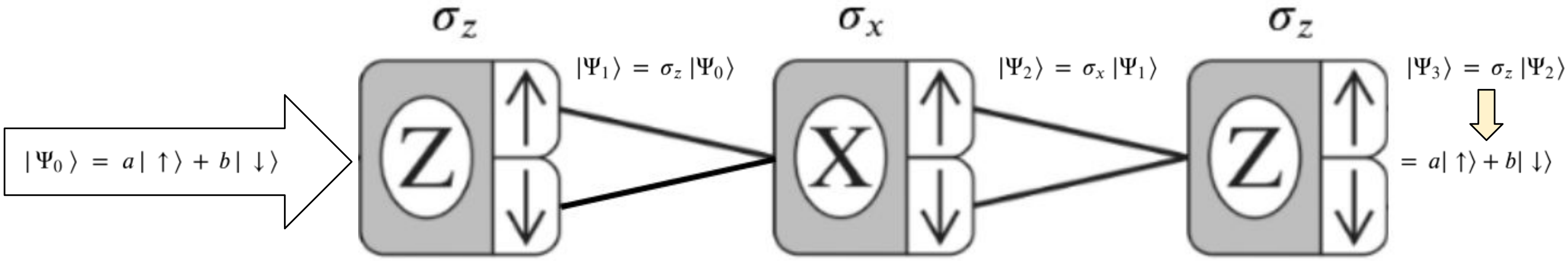
$|\uparrow\rangle \quad |\downarrow\rangle$ sono i due autovettori della matrice σ_z dunque

dato $|\Psi_0\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$

allora $|\Psi_1\rangle = \sigma_x|\Psi_0\rangle = a|+\rangle + b|-\rangle$

caso 1: non misuriamo

Lo stato all’uscita è identico allo stato all’entrata



uso operatore

$$|\Psi_1\rangle = \sigma_z|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

riscrivo

$$= a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\right) + b\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle - |-\rangle)\right)$$

semplifico (polinomi)

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)|+\rangle + (a-b)|-\rangle\right]$$

$$|\Psi_2\rangle = \sigma_x|\Psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)|+\rangle + (a-b)|-\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) + (a-b)\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a|\uparrow\rangle + 2b|\downarrow\rangle\right] = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

caso 2: misuriamo

Lo stato all'uscita è diverso allo stato all'entrata

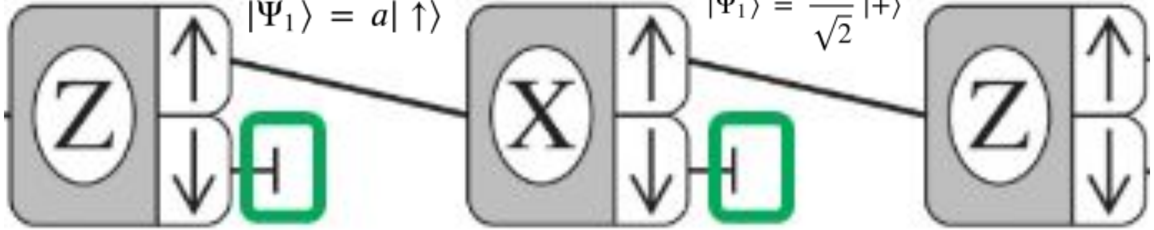
$|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$

$|\Psi_1\rangle = a|\uparrow\rangle$

$|\Psi_1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}|+\rangle$

$|\Psi_3\rangle = \sigma_z |\Psi_2\rangle$

$= \frac{a}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$



uso operatore

riscrivo

semplifico (polinomi)

$$|\Psi_1\rangle = \sigma_z |\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + \cancel{b|\downarrow\rangle}$$

$$= a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\right)$$

$$|\Psi_2\rangle = \sigma_x |\Psi_1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|+\rangle + \cancel{|-\rangle})$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

$$= \frac{a}{2}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle)$$

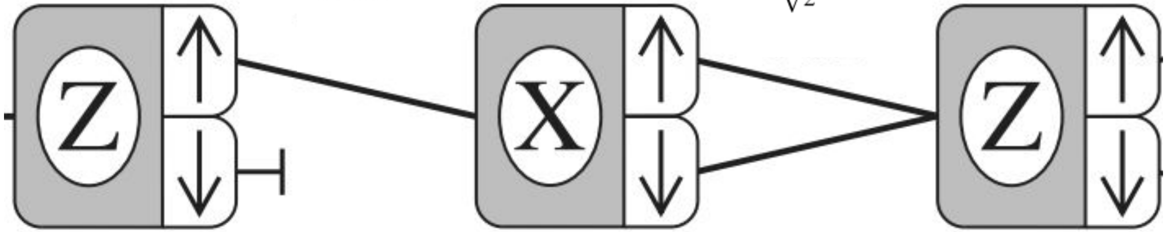
caso 3: non misuriamo solo in un punto

Lo stato all’uscita è diverso dallo stato all’entrata

$$|\Psi_1\rangle = a|\uparrow\rangle$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$



$$|\Psi_3\rangle = \sigma_z\,|\Psi_2\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$a|\uparrow\rangle$$

uso operatore

riscrivo

semplifico (polinomi)

$$|\Psi_1\rangle = \sigma_z\,|\Psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + \cancel{b|\downarrow\rangle}$$

$$= a\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)\right)$$

$$|\Psi_2\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle)\right]$$

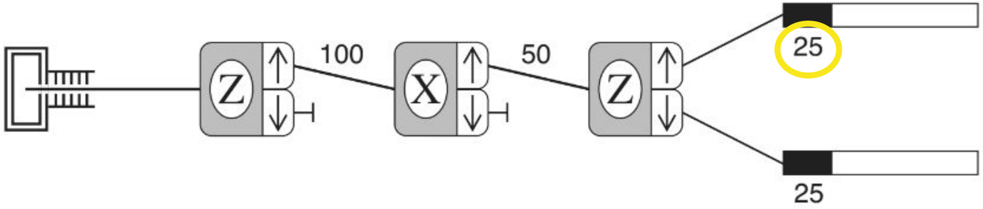
$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\,2|\uparrow\rangle = a|\uparrow\rangle$$

Previsione probabilità classica

Questi numeri sono le probabilità che un elettrone che esce dal primo SGA ha di uscire dal terzo SGA

La probabilità per un atomo che lascia il primo SGA-Z per prendere il percorso superiore attraverso il secondo SGA-X e poi l'uscita attraverso la porta superiore del 3 ° SGA-Z è del 25% (dove ora ci riferiamo al probabilità totale per questi due passaggi.)

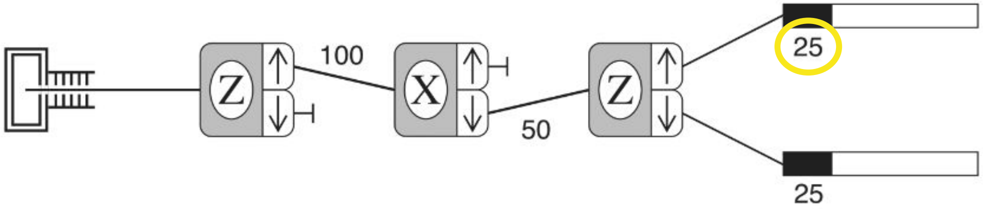
a)



\+

La probabilità per un atomo che lascia il primo SGA-Z per prendere il percorso inferiore attraverso il secondo SGA-X e poi l'uscita attraverso la porta superiore del 3 ° SGA-Z è del 25%.

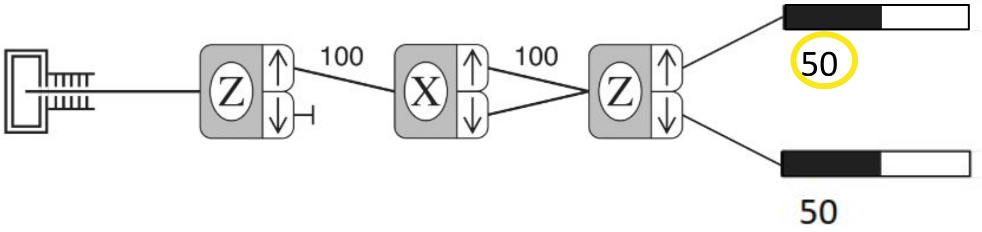
b)



=

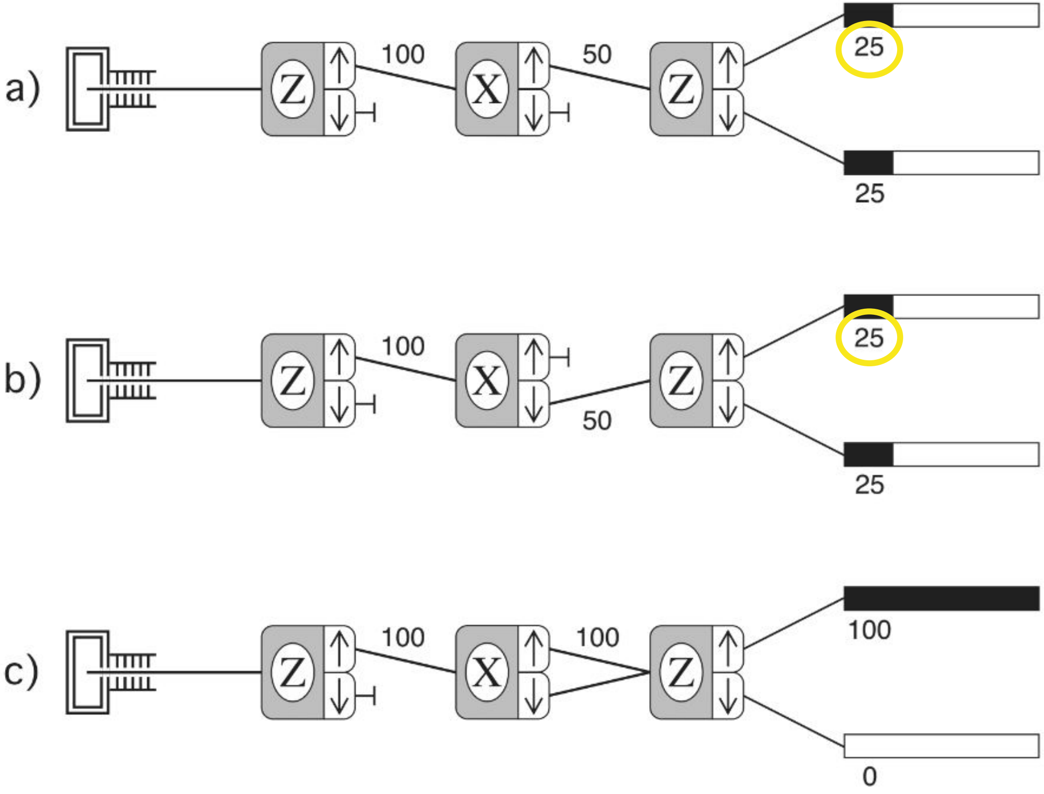
Di conseguenza la probabilità totale di uscire dalla porta superiore del 3 ° SGA-Z quando sono disponibili entrambi i percorsi (ovvero l'Esperimento 4c), dovrebbe essere del 50% (e lo stesso per l'uscita dalla porta inferiore)

c)

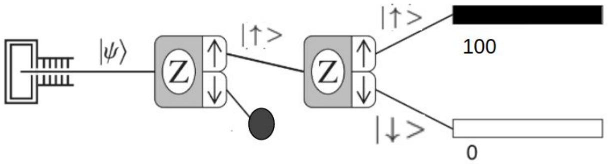


Previsione quantistica

Questi numeri sono le probabilità che un elettrone che esce dal primo SGA ha di uscire dal terzo SGA



Combinando i due fasci del 2 ° analizzatore, abbiamo evitato il “disturbo”che era evidente negli esperimenti in cui si misura.
Il risultato finale è come se il 2 ° SGA-X non fosse lì.



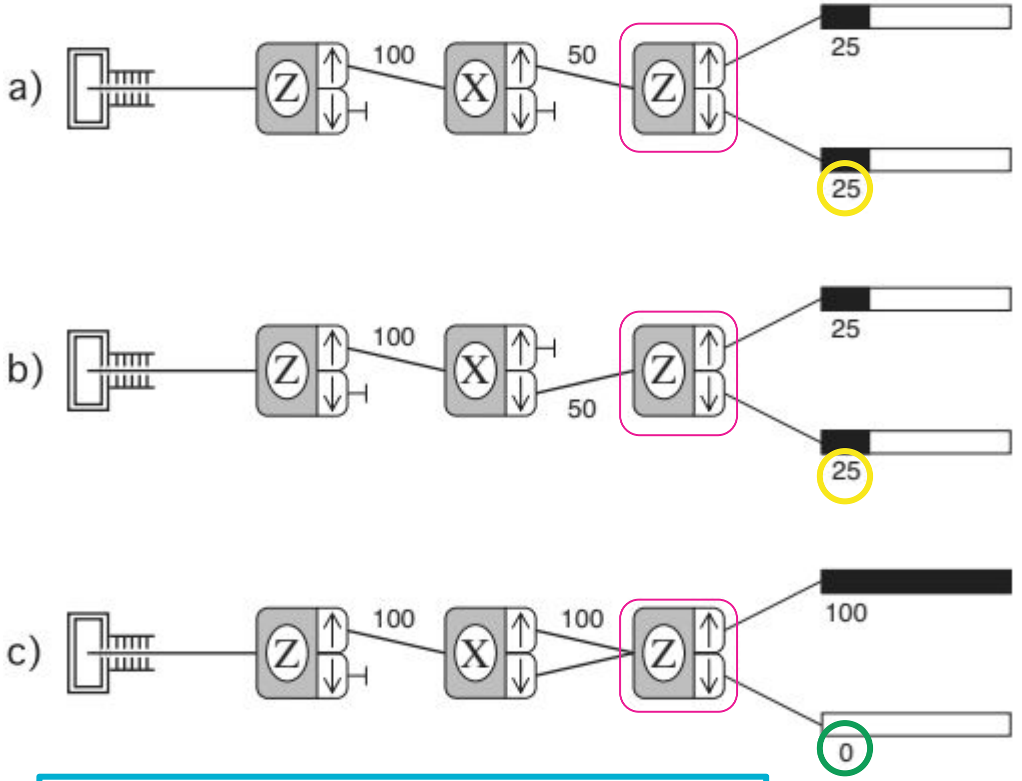
Che cosa c'è di strano?

Consideriamo cosa succede nella porta inferiore del 3 ° SGA . In questa discussione, ci riferiamo alle percentuali di atomi che lasciano il 1 ° SGA, perché quell'SGA è lo stesso in tutti e tre gli esperimenti.

Negli esperimenti 4a e 4b, Il 50% degli atomi viene bloccato dopo l'analizzatore centrale e il 25% degli atomi esce dal porta inferiore del 3 ° SGA.

Nell'esperimento 4c, il 100% degli atomi passa dal 2 ° analizzatore al 3 ° analizzatore, ma dalla porta inferiore non esce nessun atomo.

Quindi abbiamo una situazione in cui consentire più modi o percorsi per raggiungere un contatore risultano in meno conteggi. La teoria della probabilità classica non può spiegare questo aspetto della meccanica quantistica.



È come se avessi aperto una seconda finestra in una stanza per avere più luce e la stanza è diventata buia!

Interferenza

SI tratta di un fenomeno in cui la combinazione di due effetti porta alla cancellazione piuttosto che all'incremento del segnale: arrivano due segnali luminosi sullo schermo e vedo frangia buia.

Nell'esperimento di Young per trovare l'intensità del segnale luminoso che arriva in un punto dello schermo si sommano i vettori del campo elettrico della luce proveniente dalle due fenditure e poi si fà il quadrato il campo risultante in quel punto.

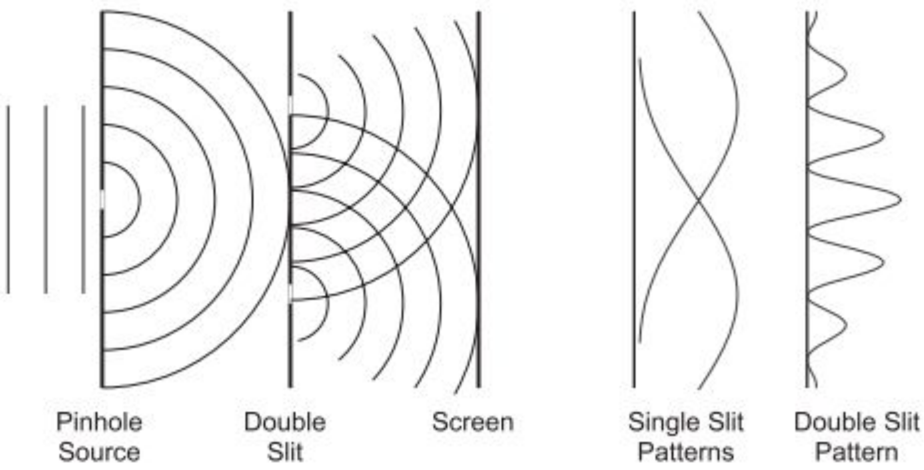
$$E_{tot}(z,t) = a_1 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - z_1) - 2\pi\nu t + \delta_1\right] + a_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - z_2) - 2\pi\nu t + \delta_2\right]$$

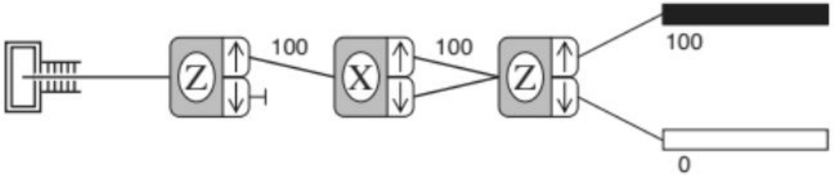
$$I(z) \propto \left\langle E_{tot}(z,t)^2 \right\rangle = \left\langle \left(a_1 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - z_1) - 2\pi\nu t + \delta_1\right] + a_2 \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z - z_2) - 2\pi\nu t + \delta_2\right] \right)^2 \right\rangle$$

differenza dei cammini ottici

$$I(z) \propto I_1(z) + I_2(z) + \boxed{2\sqrt{I_1(z) I_2(z)} \cos\left[\frac{2\pi}{\lambda}(z_2 - z_1) + \delta_2 - \delta_1\right]}$$

In meccanica quantistica si segue una procedura analoga. Si sommano le ampiezze e si prende il quadrato per trovare la probabilità risultante: questo porta con se effetti di interferenza





"frangia luminosa"

"frangia buia"

Grazie per l'attenzione

fpallotta@uninsubria.it

maria.bondani@uninsubria.it

Appendice

References

Materiali utili per approfondire

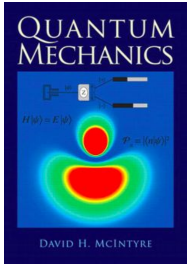
Capitoli tratti da “Quantum Mechanics – A paradigms approach” di D.H. McIntyre

capitolo 1: Stern Gerlach Experiments

http://depts.washington.edu/jrphys/ph248A11/qmch1.pdf

capitolo 2: Operators and Measurements

http://depts.washington.edu/jrphys/ph248A11/qmch2.pdf



The Quantum Mechanics Visualisation Project (QuVis) della St.Andrews University

https://www.st-andrews.ac.uk/physics/quvis/

Risoluzione esercizio: misura spin direzione θ

$$\sigma_\theta = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix}$$

TROVARE AUTOVALORI

$$\sigma_\theta - s I = \begin{pmatrix} \cos\vartheta - s & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta - s \end{pmatrix}$$

$$\det(\sigma_\theta - sI) = 0 \longrightarrow -(\cos\vartheta - s)(\cos\vartheta + s) - \sin^2\vartheta = 0$$

$$-\cos^2\vartheta + s^2 - \sin^2\vartheta = 0$$

$$s^2 - 1 = 0$$

$$\boxed{s = 1} \text{ or } \boxed{s = -1}$$

TROVARE AUTOVETTORE $\boxed{s = 1} \longrightarrow \sigma_\theta \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a\cos\vartheta + b\sin\vartheta \\ a\sin\vartheta - b\cos\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a\cos\vartheta + b\sin\vartheta = a}$$

$$b = \frac{(1-\cos\vartheta)}{\sin\vartheta}\, a = \frac{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2}}\, a = \boxed{\frac{\sin\frac{\vartheta}{2}}{\cos\frac{\vartheta}{2}}\, a}$$

BISEZIONE

DUPLICAZIONE

NORMALIZZAZIONE $|a|^2 + |b|^2 = 1$

$$|a|^2 + \frac{\sin^2\vartheta/2}{\cos^2\vartheta/2}|a|^2 = 1$$

$$\frac{1}{\cos^2\vartheta/2}|a|^2 = 1 \Rightarrow |a|^2 = \cos^2\frac{\vartheta}{2}$$

$$a = \cos\frac{\vartheta}{2} \rightarrow b = \sin\frac{\vartheta}{2}$$

DUNQUE $$\underset{s=1}{|\vartheta_+\rangle} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\vartheta}{2} \\ \sin\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \rightarrow |\vartheta_+\rangle = \cos\frac{\vartheta}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \sin\frac{\vartheta}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calcoli sequenza SGA

caso 1

$$|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\uparrow\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \sigma_z|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\uparrow\rangle$$

$$= a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right) + b\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle - |-\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)|+\rangle + (a-b)|-\rangle\right]$$

$$|\psi_2\rangle = \sigma_x|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)|+\rangle + (a-b)|-\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}\left[(a+b)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) + (a-b)\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(a+b+a-b)|\uparrow\rangle + (a+b-a+b)|\downarrow\rangle\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2a|\uparrow\rangle + 2b|\downarrow\rangle\right]$$

$$= a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \equiv |\psi_0\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \sigma_z|\psi_2\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle \equiv |\psi_0\rangle$$

caso 2

$$|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\uparrow\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \sigma_z|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle$$

$$= a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$|\psi_2\rangle = \sigma_x|\psi_1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}|+\rangle$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

$$= \frac{a}{2}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right)$$

$$|\psi_3\rangle = \sigma_z|\psi_2\rangle = \frac{a}{2}|\uparrow\rangle + \frac{a}{2}|\downarrow\rangle$$

$$P_\uparrow = \left|\frac{a}{2}\right|^2 = \frac{a^2}{4} = P_\downarrow$$

caso 3

$$|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

$$|\psi_1\rangle = \sigma_z|\psi_0\rangle = a|\uparrow\rangle + b|\downarrow\rangle$$

$$= a\,\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$|\psi_2\rangle = \sigma_x|\psi_1\rangle = \frac{a}{\sqrt{2}}\left(|+\rangle + |-\rangle\right)$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle - |\downarrow\rangle\right)\right]$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}\,\frac{2}{\sqrt{2}}|\uparrow\rangle = a|\uparrow\rangle$$

$$|\psi_3\rangle = \sigma_z|\psi_2\rangle = a|\uparrow\rangle$$